Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Prof. Dr. Nicole Schweikardt

29. Mai 2018

Logik und Komplexität

Sommersemester 2018

Übungsblatt 5

Zu bearbeiten bis 5. Juni 2018

Bemerkung:

Aufgabe 1 von Blatt 5 ergibt zusammen mit Aufgabe 2 von Blatt 4 einen Beweis des Satzes von Grädel („ESO-HORN beschreibt P auf $\textsc{Fin}_<$“).

Aufgabe 1: (25 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede endliche, funktionenfreie Signatur σ, die das zweistellige Relationssymbol $<$ enthält, und jede unter Isomorphie abgeschlossene Klasse $\mathcal{C}$ von endlichen geordneten σ-Strukturen gilt: Falls es eine deterministische Turingmaschine gibt, die bei Eingabe einer endlichen geordneten σ-Struktur $\mathcal{A}$ (repräsentiert durch $\text{enc}_{<^\mathcal{A}}(\mathcal{A})$) in Polynomialzeit entscheidet, ob $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$, dann gibt es auch einen ESO-HORN[σ]-Satz Φ, so dass für alle endlichen geordneten σ-Strukturen $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{A} \models \Phi \iff \mathcal{A} \in \mathcal{C}$.

Aufgabe 2: (25 Punkte)

Beweisen Sie die Richtung “$\Longrightarrow$” von Satz 3.7, d.h. zeigen Sie:

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\overline{a} := a_1, a_2$ und $\overline{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich $\leqslant^\mathcal{A}$ und $\leqslant^\mathcal{B}$ sind.

Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leqslant 2^m$, so hat *Spoiler* eine Gewinnstrategie im m-Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \overline{a})$ und $(\mathcal{B}, \overline{b})$.

Aufgabe 3: (25 Punkte)

Beweisen Sie Korollar 3.16(b), d.h. zeigen Sie:

Für jede endliche relationale Signatur σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

> Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Formeln mit $\leqslant k$ freien Variablen und Quantorentiefe $\leqslant m$.

Geben Sie eine möglichst kleine obere Schranke $f(\sigma, k, m)$ für die Anzahl der verschiedenen, paarweise nicht äquivalenten Formeln an.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(10 + 15 = 25 Punkte)**

(a) Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ zwei disjunkte σ-Strukturen. Beweisen Sie Lemma 3.18, d.h. zeigen Sie, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \text{ und } \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \ \approx_m \ \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2.$$

(b) Arbeiten Sie die Details zu Beispiel 3.19 aus, d.h.:

Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“). Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ-Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $A_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k-elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ-elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$. Zeigen Sie, dass für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left.\begin{array}{c} \big(\, k_1 = k_2 \text{ oder } k_1, k_2 \geqslant m \,\big) \\ \text{und} \\ \big(\, \ell_1 = \ell_2 \text{ oder } \ell_1, \ell_2 \geqslant m \,\big) \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{A}_{k_1,\ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2,\ell_2}.$$