Bemerkung 3.7

Der Lokalitätsradius eines basis-lokalen Satzes der Form

$$\exists x_1 \cdots \exists x_\ell \Big(\bigwedge_{1 \le i < j \le \ell} dist(x_i, x_j) > 2r \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{\ell} \lambda(x_i) \Big)$$

ist definiert als die Zahl r.

Wir sagen: Ein lokaler FO+MOD-Zählsatz der Form $\exists^{i \bmod m} x\, \lambda(x)$ hat Lokalitätsradius $\le r$, wenn die Formel λ r-lokal um x ist.

Eine lokale Formel $\psi(\bar{x})$ hat Lokalitätsradius $\le r$, falls sie r-lokal um $\bar{x}$ ist.

Eine Formel γ in GNF für $L \in \{FO, FO+MOD\}$ hat Lokalitätsradius $\le r$, falls sie eine Boolesche Kombination von lokalen Formeln, basis-lokalen Sätzen über L und/oder lokalen FO+MOD-Zählsätzen (falls $L = FO+MOD$) mit Lokalitätsradius $\le r$ ist.

Der von Theorem 3.6 bereitgestellte Algorithmus konstruiert zu jeder Formel φ der Quantorentiefe $q := qr(\varphi)$ ein äquivalente GNF-Formel γ vom Lokalitätsradius $\le r(q)$, mit $r(0) = 0$ und $r(i+1) \le 7 \cdot r(i) + 3$ f.a. $i \in \mathbb{N}$ (dies folgt direkt aus dem Beweis von Theorem 3.6; Details: Übung!).

Per Induktion nach i folgt: $r(i) < 7^i$ f.a. $i \in \mathbb{N}$

(<u>Beweis:</u> $i = 0$: $r(0) = 0 < 1 = 7^0$ ✓

$i \to i+1$: $r(i+1) \le 7 \cdot r(i) + 3 \underset{\text{Ind.ann.}}{\le} 7 \cdot (7^i - 1) + 3 = 7^{i+1} - 7 + 3 < 7^{i+1}$)

Somit hat die zu φ äquivalente GNF-Formel γ den Lokalitätsradius $< 7^{qr(\varphi)}$.

Im Folgenden werden zwei Anwendungsbereiche des Satzes von Gaifman vorgestellt.

(1) Nicht-Ausdrückbarkeitsresultate:

Der Satz von Gaifman liefert ein Werkzeug um zu zeigen, dass bestimmte Anfragen nicht in FO oder FO+MOD formalisiert werden können die Gaifman-Lokalität der Logiken FO und FO+MOD. Details dazu finden sich in Kapitel 3.2.

(2) Algorithmische Meta-Theoreme:

Die Transformation in Gaifman-Normalform kann oft als erster Schritt verwendet werden, um effiziente Algorithmen für Berechnungsprobleme, die durch FO- oder FO+MOD-Formeln gegeben sind, zu entwickeln. Details dazu finden sich in Kapitel 3.3.

3.2 Die Gaifman-Lokalität von FO und FO+MOD

<u>Definition 3.8</u> (Anfragen)

Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

(a) Eine <u>k-stellige Anfrage</u> (engl.: query) ist eine Abbildung Q, die jeder σ-Struktur $\mathcal{A}$ eine k-stellige Relation $Q(\mathcal{A}) \subseteq A^k$ zuordnet.

(b) Sei $\mathcal{S}$ eine Klasse von σ-Strukturen und sei L eine Logik.
Eine k-stellige Anfrage Q heißt <u>L-definierbar auf $\mathcal{S}$</u>, falls es eine $L[\sigma]$-Formel $\varphi(\bar{x})$ mit $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_k)$ und $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ für k verschiedene Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gibt, so dass f.a. $\mathcal{A} \in \mathcal{S}$ gilt:

$$Q(\mathcal{A}) = [\![\varphi(\bar{x})]\!]^{\mathcal{A}} := \{ \bar{a} \in A^k : \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \}.$$

<u>Beispiel 3.9</u>

Sei $\sigma := \{E/2\}$. Die 1-stellige Anfrage $Q_{\text{isolierte-Punkte}}$, die jedem gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ die Menge

$$Q_{\text{isolierte-Punkte}}(\mathcal{A}) := \left\{ a \in A : \begin{array}{l} \text{es gibt in } \mathcal{A} \text{ keine Kante} \\ \text{von oder zu Knoten } a \end{array} \right\}$$

zuordnet, ist FO-definierbar (auf der Klasse aller σ-Strukturen) durch die Formel $\varphi(x) := \neg \exists y \, (E(x,y) \vee E(y,x))$

In Kapitel 1 haben wir bereits den Begriff der Hanf-Lokalität (als Eigenschaft von Strukturklassen) kennengelernt.

Ein etwas anderer Lokalitätsbegriff, der sich nicht auf Strukturklassen, sondern auf Anfragen bezieht, ist die folgendermaßen definierte Gaifman-Lokalität.

<u>Notation 3.10</u>

Sei σ eine Signatur, L eine Logik und $k, m \in \mathbb{N}$. Für zwei σ-Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ und Tupel $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in B^k$ schreiben wir

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m^L (\mathcal{B}, \bar{b})$$

falls f.a. $L[\sigma]$-Formeln φ mit $qr(\varphi) \leq m$ und $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_k\}$ für k verschiedene Variablen $x_1, \ldots, x_k$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$.

<u>Definition 3.11</u> (Gaifman-Lokalität)

Sei σ eine Signatur, sei L eine Logik, sei S eine Klasse von σ-Strukturen und sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
Eine k-stellige Anfrage Q heißt <u>Gaifman-lokal auf S bzgl. L</u>, falls es Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ gibt, s.d. f.a. $\mathcal{A} \in S$ und alle $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in A^k$ mit $(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a}) \equiv_m^L (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{b}), \bar{b})$ gilt: $\bar{a} \in Q(\mathcal{A}) \iff \bar{b} \in Q(\mathcal{A})$.

Aus dem Satz von Gaifman für FO und FO+MOD folgt unmittelbar:

<u>Satz 3.12</u> (Gaifman-Lokalität von FO und FO+MOD)

Für jede Signatur σ, jede Klasse S von σ-Strukturen und jedes $L \in \{FO, FO+MOD\}$ gilt:

Alle Anfragen, die L-definierbar auf S sind, sind Gaifman-lokal auf S bzgl. L.

<u>Beweis:</u> Sei $L \in \{FO, FO+MOD\}$.

Sei $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, sei $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, sei $\varphi(\bar{x})$ eine $L[\sigma]$-Formel mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ und sei Q die von $\varphi(\bar{x})$ auf S definierte k-stellige Anfrage.

Gemäß dem Satz von Gaifman (Theorem 3.6) ist $\varphi(\bar{x})$ äquivalent zu einer $L[\sigma]$-Formel $\gamma(\bar{x})$, die in GNF für L ist. Somit ist $\gamma(\bar{x})$ eine Boolesche Kombination von $L[\sigma]$-Sätzen $\chi_1, \dots, \chi_s$ (für eine geeignete Zahl s) und von lokalen $L[\sigma]$-Formeln $\lambda_1(\bar{x}), \dots, \lambda_t(\bar{x})$ (für eine geeignete Zahl t).

Von Bemerkung 3.7 wissen wir insbes., dass jede der Formeln $\lambda_1(\bar{x}), \dots, \lambda_t(\bar{x})$ r-lokal um $\bar{x}$ ist für $r := 7^{qr(\varphi)}$.

Sei $m := \max\{qr(\lambda_i) : i \in \{1, \dots, t\}\}$

Betrachte nun eine beliebige σ-Struktur $\mathcal{A} \in S$ und beliebige Tupel $\bar{a} \in A^k$, $\bar{b} \in A^k$ mit

$$\left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{a}), \bar{a}\right) \equiv_m^L \left(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(\bar{b}), \bar{b}\right). \quad (*)$$

<u>Zu zeigen:</u> $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}]$

Wegen $(*)$ gilt für jedes $i \in \{1, \dots, t\}$:

$$\mathcal{A} \models \lambda_i[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \lambda_i[\bar{b}]$$

(da λ_i r-lokal ist und Quantorentiefe $\leq m$ hat).

Da χ_j ein <u>Satz</u> ist, gilt außerdem für jedes $j \in \{1, \dots, s\}$:

$$\mathcal{A} \models \chi_j[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \chi_j[\bar{b}].$$

Da γ eine Boolesche Kombination der Formeln $\chi_1, \dots, \chi_s, \lambda_1(\bar{x}), \dots, \lambda_t(\bar{x})$ ist, folgt:

$$\mathcal{A} \models \gamma[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \gamma[\bar{b}].$$

Und da γ äquivalent zu φ ist, gilt auch

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[\bar{b}].$$

Somit ist die durch $\varphi(\bar{x})$ auf S definierte Anfrage Gaifman-lokal auf S bzgl. L.

Bemerkung 3.13

Indem man zeigt, dass eine Anfrage nicht Gaifman-lokal ist, kann man (unter Verwendung von Satz 3.12) folgern, dass die Anfrage nicht L-definierbar (für L = FO bzw. L = FO+MOD) ist.

Beispiel 3.14

Sei $\sigma := \{E/2\}$.

Die Erreichbarkeits-Anfrage E^*, die jedem endlichen gerichteten Graphen $\mathcal{A}$ die Relation

$$E^*(\mathcal{A}) := \{ (a_1,a_2) \in A \times A : \text{es gibt in } \mathcal{A} \text{ einen Weg von Knoten } a_1 \text{ zu Knoten } a_2 \}$$

zuordnet, ist nicht Gaifman-lokal auf der Klasse aller endlichen gerichteten Graphen bzgl. FO+MOD, und daher gemäß Satz 3.12 auch nicht FO+MOD-definierbar auf der Klasse aller endlichen gerichteten Graphen.

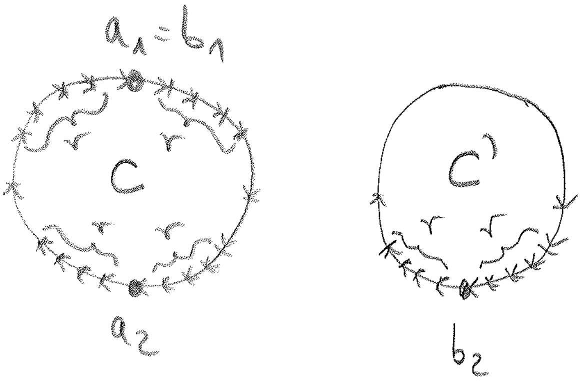
Beweis:

Angenommen, die Anfrage E^* wäre doch Gaifman-lokal.

(Δ) Dann gibt es Zahlen $r, m \in \mathbb{N}$ s.d. f.a. endlichen σ-Strukturen $\mathcal{A}$ und alle $a_1,a_2,b_1,b_2 \in A$ mit $(\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(a_1,a_2),a_1,a_2) \equiv_m^{FO+MOD} (\mathcal{N}_r^{\mathcal{A}}(b_1,b_2),b_1,b_2)$ gilt: a_2 ist von a_1 aus in $\mathcal{A}$ erreichbar $\iff$ b_2 ist von b_1 aus in $\mathcal{A}$ erreichbar.

Betrachte nun aber konkret die σ-Struktur $\mathcal{A}$, die aus 2 disjunkten gerichteten Kreisen C und C' auf je $2(2r+1)+2 = 4r+4$ Knoten besteht.

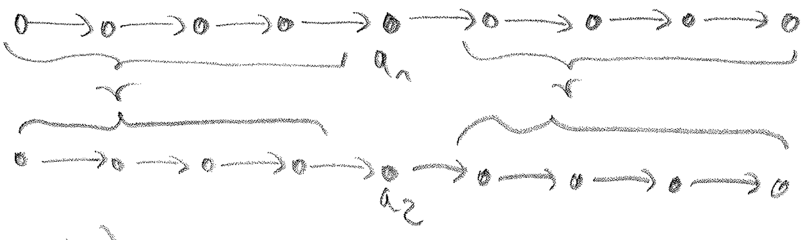
Skizze: $\mathcal{A}$:



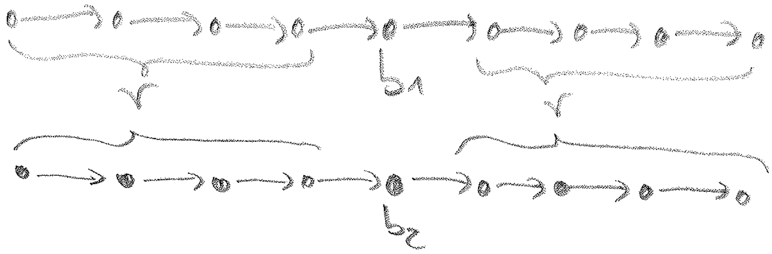
Ferner seien a_1 und a_2 zwei Knoten auf C vom Abstand $dist^{\mathcal{A}}(a_1, a_2) > 2r+1$.

Sei $b_1 := a_1$ und sei b_2 ein beliebiger Knoten auf C'.
Insbes ist a_2 von a_1 aus erreichbar, aber b_2 ist nicht von b_1 aus erreichbar.

Dann ist $\mathcal{W}_r^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)$ von der Form



und $\mathcal{W}_r^{\mathcal{A}}(b_1, b_2)$ ist von der Form



Somit ist

$$\left(\mathcal{W}_r^{\mathcal{A}}(a_1,a_2), a_1, a_2\right) \cong \left(\mathcal{W}_r^{\mathcal{A}}(b_1,b_2), b_1, b_2\right)$$ und daher

auch $\left(\mathcal{W}_r^{\mathcal{A}}(a_1,a_2), a_1, a_2\right) \overset{\text{FO+MOD}}{\underset{m}{\equiv}} \left(\mathcal{W}_r^{\mathcal{A}}(b_1,b_2), b_1, b_2\right)$. ↯ Widerspruch zu (A)

$\square$