Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

Version vom 4. Mai 2017

# Einführung in die Beweiskomplexität

Sommersemester 2017

## Übungsblatt 2

*Zu bearbeiten bis 15. Mai 2017*

*Bitte geben Sie die schriftlichen Lösungen der Übungsaufgaben vor der Lehrveranstaltung am 15. Mai ab. Sie dürfen die Aufgaben zu zweit bearbeiten und abgeben. Bitte beachten Sie dabei, dass jeder von Ihnen in der Lage sein muss, die Lösung aller bearbeiteten Aufgaben in der Lehrveranstaltung zu präsentieren.*

### Aufgabe 1: (12 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen (Lemma 2.18 in den Notizen):

**(a)** $F$ ist genau dann erfüllbar, wenn $F[\oplus]$ erfüllbar ist.

**(b)** Wenn $F$ unerfüllbar ist, dann gilt:
- $D(F \vdash \emptyset) \leqslant D(F[\oplus] \vdash \emptyset) \leqslant 2 \cdot D(F \vdash \emptyset)$
- $w(F \vdash \emptyset) \leqslant w(F[\oplus] \vdash \emptyset) \leqslant 2 \cdot w(F \vdash \emptyset) + 1$

*Tipp:* Verwenden Sie das Resolutionsspiel.

### Aufgabe 2: (12 Punkte)

Sei $F$ eine unerfüllbare Klauselmenge über $n$ Variablen. Zeigen Sie:

**(a)** Es gibt einen Algorithmus, der in Zeit $n^{O\left(D(F\vdash\emptyset)\right)}$ eine *baumartige* Resolutionswiderlegung findet.

**(b)** Es gibt einen Algorithmus, der in Zeit $n^{O\left(w(F\vdash\emptyset)\right)}$ eine Resolutionswiderlegung findet.

**(c)** Es gibt einen Algorithmus, der in Zeit $n^{O\left(\log(L_T(F\vdash\emptyset))+w(F)\right)}$ eine Resolutionswiderlegung findet.

*Anmerkung:* Aus Aufgabenteil (c) folgt, dass es einen Algorithmus gibt, welcher für unerfüllbare 3-KNF eine (nicht notwendigerweise baumartige) Resolutionswiderlegung findet und dessen Laufzeit quasipolynomiell ($2^{\log^{O(1)}(L_T(F\vdash\emptyset))}$) in der Länge der kleinsten *baumartigen* Resolutionswiderlegung ist. Es ist eine offene Forschungsfrage, ob auch *baumartige* Resolutionswiderlegungen in dieser Zeit gefunden werden können.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

**Aufgabe 3:** **(12 Punkte)**

Sei $G$ ein azyklischer gerichteter Graph, in dem jeder Knoten Eingangsgrad $|N^-(v)| \in \{0,2\}$ hat und sei $S_G = \{v \in V(G) \mid N^-(v) = \emptyset\}$, $T_G = \{v \in V(G) \mid N^+(v) = \emptyset\}$.[1] Die *Höhe* $h(G)$ von $G$ ist die Anzahl der Kanten auf dem längsten gerichteten Pfad in $G$. Zeigen Sie

$$\mathrm{Peb}_G(S_G, T_G) \leqslant h(G) + 2. \tag{1}$$

**Aufgabe 4:** **(12 Punkte)**

Betrachten Sie folgende "XOR-Variante" von Pebbleformeln. Für einen azyklischen gerichteten Graphen $G$, in dem jeder Knoten Eingangsgrad $|N^-(v)| \in \{0,2\}$ hat, sei $\mathrm{XORPEB}_G$ eine Klauselmenge über den Variablen $\{x_v \mid v \in V(G)\}$ mit den Klauseln

- $\{x_s\}$, für alle $s \in S_G$,
- $\{\overline{x_t}\}$, für alle $t \in T_G$,
- $x_v \oplus x_{u_1} \oplus \cdots \oplus x_{u_\ell}$ (expandiert als Klauselmenge[2]),
  für alle $v \in V(G)$ mit $N^-(v) = \{u_1, \ldots, u_\ell\}$.

Zeigen Sie, dass $\mathrm{XORPEB}_G$ unerfüllbar ist und dass $w(\mathrm{XORPEB}_G \vdash \emptyset) = 3$.

---

Es folgt noch eine freiwillige Zusatzaufgabe (welche im Zuge aktueller Forschung aufkam und deren Lösung demnächst als Teil einer Forschungsarbeit publiziert wird). Es gibt **20 Zusatzpunkte** für die Erste / den Ersten / das erste Paar, welche die vollständige und korrekte Lösung bis Ende des Semesters in der Lehrveranstaltung vorstellt.

**Aufgabe 5: Zusatzaufgabe**

Betrachten Sie die Familie $\{P_h \mid h \in \mathbb{N}\}$ der Pyramidengraphen aus der Vorlesung. Bestimmen Sie asymptotisch die Resolutionstiefe von $\mathrm{XORPEB}_{P_h}$ (aus Aufgabe 4). Das heißt, geben Sie eine Funktion $f(h)$ an und zeigen Sie, dass $D(\mathrm{XORPEB}_{P_h} \vdash \emptyset) = \Theta(f(h))$.

---

[1] Zur Erinnerung: $N^-(v) := \{u \mid (u,v) \in E(G)\}$ und $N^+(v) := \{w \mid (v,w) \in E(G)\}$.

[2] Formal: $x_v \oplus x_{u_1} \oplus \cdots \oplus x_{u_\ell}$ ist die Menge aller Klauseln $C$ mit $\mathrm{var}(C) = \{x_v, x_{u_1}, \ldots, x_{u_\ell}\}$ und einer geraden Anzahl an negativen Literalen.