Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lehrstuhl Logik in der Informatik
Dr. Christoph Berkholz

24. März 2017

Einführung in die Beweiskomplexität

Sommersemester 2017

Übungsblatt 1

Zu bearbeiten bis 8. Mai 2017

Bitte geben Sie die schriftlichen Lösungen der Übungsaufgaben vor der Vorlesung am 8. Mai ab. Sie dürfen die Aufgaben zu zweit bearbeiten und abgeben. Bitte beachten Sie dabei, dass jeder von Ihnen in der Lage sein muss, die Lösung aller bearbeiteten Aufgaben in der Lehrveranstaltung zu präsentieren.

Aufgabe 1: **(8 Punkte)**

Zeigen Sie, dass es für jede unerfüllbare Klauselmenge F mit n Variablen eine baumartige Resolutionswiderlegung Γ der Weite $w(\Gamma) \leqslant n$, Tiefe $D(\Gamma) \leqslant n$ und Länge $L(\Gamma) \leqslant 2^{n+1} - 1$ gibt.

Aufgabe 2: **(8 Punkte)**

Eine Resolutionswiderlegung Γ ist *regulär*, wenn auf jedem Pfad im Ableitungsgraphen von Γ jede Variable höchstens einmal zum resolvieren verwendet wurde. Zeigen Sie, dass $R_{\text{reg}} := \{(F, \Gamma) \mid \Gamma \text{ ist eine reguläre Resolutionswiderlegung von } F\}$ ein Beweissystem für UNSAT ist, welches $R_{\text{baum}} := \{(F, \Gamma) \mid \Gamma \text{ ist eine baumartige Resolutionswiderlegung von } F\}$ p-simuliert.

Aufgabe 3: **(8 Punkte)**

Zur Einnerung: Eine Klausel C *folgt* aus einer Klauselmenge F (in Symbolen: $F \models C$), wenn für alle Belegungen α mit $\alpha \models F$ auch $\alpha \models C$ gilt.

Ein aussagenlogischer Beweiskalkül über einer Klauselmenge F ist *ableitungsvollständig*, wenn alle Klauseln C mit $F \models C$ aus F ableitbar sind.

(a) Zeigen Sie, dass der Resolutionskalkül (ohne Weakening-Regel) *nicht* ableitungsvollständig ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Resolutionskalkül mit Weakening-Regel ableitungsvollständig ist.

— *auf der nächsten Seite geht's weiter* —

Aufgabe 4: **(8 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Weakening-Regel nicht dabei hilft, Resolutionswiderlegungen (bezüglich Länge L, Tiefe D und Weite w) kompakter zu gestallten. Beweisen Sie dazu, dass es für jede Resolutionswiderlegung Γ einer Klauselmenge F, welche die Weakening-Regel verwendet, eine Resolutionswiderlegung Γ' ohne Weakening-Regel gibt, sodass

- $L(\Gamma') \leqslant L^*(\Gamma) \leqslant L(\Gamma)$,
- $D(\Gamma') \leqslant D^*(\Gamma) \leqslant D(\Gamma)$,
- $w(\Gamma') \leqslant w(\Gamma)$,
- wenn Γ baumartig ist, dann ist auch Γ' baumartig.

Hierbei bezeichne $L^*(\Gamma)$ die Anzahl der Axiome und Resolventen in Γ und $D^*(\Gamma)$ die maximale Anzahl von Resolventen auf einem Pfad im Ableitungsgraphen von Γ.

Aufgabe 5: **(8 Punkte)**

Beweisen Sie Lemma 2.4 aus der Vorlesung: Wenn DPLL(F, α) nach n rekursiven Aufrufen FALSE zurückgibt, dann gibt es unter Verwendung der Weakening-Regel eine baumartige Resolutionsableitung von $C(\alpha)$ aus F, die höchstens n Resolutionsschritte verwendet.

Aufgabe 6: **(8 Punkte)**

Gibt es für jede 3-KNF eine Resolutionswiderlegung, deren Tiefe und Weite minimal ist? Das heißt, beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: "Zu jeder 3-KNF F gibt es eine Resolutionswiderlegung Γ mit $w(\Gamma) = w(F \vdash \emptyset)$ und $D(\Gamma) = D(F \vdash \emptyset)$."