Folie 64

## Die Chernoff-Schranke

**Satz B.20** (Chernoff-Schranke)**.**
*Sei $p$ eine reelle Zahl mit $0 < p < 1$. Wir werfen eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p$ auf „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ auf „Zahl“ landet. Nach dem $i$-ten Münzwurf setzen wir*

$$X_i \ := \ \begin{cases} 1 & \textit{falls die Münze beim } i\textit{-ten Wurf auf „Kopf“ gefallen ist} \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

*Wir machen insgesamt $s \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ Münzwürfe und setzen*

$$X \ := \ \sum_{i=1}^{s} X_i,$$

*d.h. $X$ gibt an, bei wie vielen der $s$ Münzwürfe die Münze auf „Kopf“ gefallen ist. Dann gilt:*

*(a) Der Erwartungswert von $X$ ist $\mathrm{E}(X) = p \cdot s$.*

*(b) Für jede reelle Zahl $\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 1$ ist*

$$\mathrm{P}\Big(X < (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad e^{-\frac{1}{2}\cdot\varepsilon^2\cdot ps}.$$

*(c) Für jede reelle Zahl $\beta > 0$ ist*

$$\mathrm{P}\Big(X > (1+\beta)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad e^{-\frac{1}{3}\cdot\min(\beta,\beta^2)\cdot ps}.$$

*(d) Für jede reelle Zahl $\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon < 1$ ist*

$$\mathrm{P}\Big(X \notin (1\pm\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\Big) \quad < \quad 2\cdot e^{-\frac{1}{3}\cdot\varepsilon^2\cdot ps}.$$

Hierbei verwenden wir „$X \notin (1\pm\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)$“ als Kurzschreibweise für

$$„\ X \ < \ (1-\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X) \quad \text{oder} \quad X \ > \ (1+\varepsilon)\cdot\mathrm{E}(X)\ “$$