

Kapitel 3

Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele

In diesem Kapitel werden Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele (kurz: EF-Spiele) eingeführt. Diese liefern ein Werkzeug, mit dessen Hilfe man zeigen kann, dass bestimmte Anfragen oder Klassen von Strukturen nicht in bestimmten Logiken definiert werden können.

Folie 1

Der Einfachheit halber betrachten wir hier meistens nur Signaturen, die keine Funktionssymbole und keine Konstantensymbole enthalten. Solche Signaturen werden im Folgenden *relationale Signaturen* genannt.

Außerdem werden wir im Folgenden bei zwei gegebenen Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} immer o.B.d.A. annehmen, dass ihre Universen disjunkt sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

3.1 Das m -Runden EF-Spiel

Das m -Runden EF-Spiel

Folie 2

Sei σ eine relationale Signatur und seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen. Für $k \in \mathbb{N}$ seien $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B$ Folgen der Länge k von Elementen aus A bzw. B .

Sei $m \in \mathbb{N}$.

Das m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) (bzw. auf \mathcal{A} und \mathcal{B} , falls $k = 0$ ist) wird gemäß folgender *Spielregeln* gespielt:

Folie 3

Spielregeln des m -Runden EF-Spiels auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b})

- Es gibt 2 Spieler, genannt *Spoiler* (kurz: *Sp*) und *Duplicator* (kurz: *Dupl*).
- Das *Spielbrett* besteht aus (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .
- Eine *Partie* des Spiels besteht aus m Runden.

In jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ geschieht Folgendes:

1. Zunächst wählt *Spoiler* entweder ein Element in A , das im Folgenden mit a_{k+i} bezeichnet wird, oder er wählt ein Element in B , das im Folgenden mit b_{k+i} bezeichnet wird.

Beachte: Insbes. kann *Spoiler* in jeder Runde neu entscheiden, in welcher der beiden Strukturen er ein Element wählen möchte.

2. Danach antwortet *Duplicator* mit einem Element aus dem Universum der anderen Struktur, d.h. er wählt ein $b_{k+i} \in B$, falls *Spoiler* ein $a_{k+i} \in A$ gewählt hat, bzw. ein Element $a_{k+i} \in A$, falls *Spoiler* ein $b_{k+i} \in B$ gewählt hat.

Nach Runde m ist die Partie beendet und der Gewinner wird wie folgt ermittelt:

Folie 4

Gewinnbedingung

Duplicator hat gewonnen, falls die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Für alle $j, j' \in \{1, \dots, k+m\}$ gilt: $a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}$.

(2) Die Abbildung $\pi : \{a_1, \dots, a_{k+m}\} \rightarrow \{b_1, \dots, b_{k+m}\}$ mit

$$\pi(a_j) := b_j, \quad \text{für jedes } j \in \{1, \dots, k+m\}$$

ist ein *partieller Isomorphismus* von \mathcal{A} nach \mathcal{B} (siehe Definition 3.1).

Spoiler hat gewonnen, falls mindestens eine der beiden obigen Bedingungen verletzt ist.

Definition 3.1 (partieller Isomorphismus).

Sei σ eine relationale Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen und sei $X \subseteq A$. Eine Abbildung $\pi : X \rightarrow B$ heißt *partieller Isomorphismus* von \mathcal{A} nach \mathcal{B} , falls gilt:

(1) π ist injektiv und

(2) für jedes $R \in \sigma$, für $r := \text{ar}(R)$ und für alle $(x_1, \dots, x_r) \in X^r$ gilt:

$$(x_1, \dots, x_r) \in R^{\mathcal{A}} \iff (\pi(x_1), \dots, \pi(x_r)) \in R^{\mathcal{B}}.$$

Folie 5

Beispiel 3.2. Sei $\sigma := \{E/2\}$ und sei $k := 0$.

In den folgenden Darstellungen von Graphen repräsentiert jede ungerichtete Kante zwischen Knoten x und y die beiden gerichteten Kanten (x, y) und (y, x) .

(a) Betrachte die folgenden beiden Graphen \mathcal{A}, \mathcal{B} .

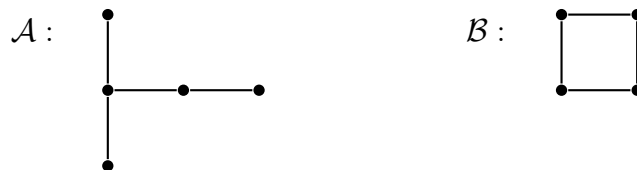


Spoiler gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf \mathcal{A} und \mathcal{B} , indem er folgendermaßen spielt:

- Runde 1: Wähle denjenigen Knoten a_1 in \mathcal{A} , der mit allen anderen Knoten durch eine Kante verbunden ist.
- Runde 2: Wähle einen Knoten b_2 in \mathcal{B} , der nicht zum Knoten b_1 benachbart ist.

Folie 6

(b) Betrachte die beiden folgenden Graphen \mathcal{A}, \mathcal{B} .



Duplicator gewinnt das 2-Runden EF-Spiel auf \mathcal{A} und \mathcal{B} , denn in beiden Graphen gibt es zu jedem Knoten sowohl einen Nachbarn, als auch einen Nicht-Nachbarn.

- (c) *Spoiler* gewinnt das 3-Runden EF-Spiel auf den Graphen \mathcal{A} und \mathcal{B} aus (b), indem er in den ersten 3 Runden 3 verschiedene nicht benachbarte Knoten in \mathcal{A} wählt.

Folie 7

Notation 3.3.

Wir schreiben $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$, um das m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) zu bezeichnen.

Ist $k = 0$ (d.h. \bar{a} und \bar{b} sind leer), so schreiben wir kurz $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ an Stelle von $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Folie 8

Die Ziele von Spoiler und Duplicator

Die Gewinnbedingung im EF-Spiel ist so gewählt, dass die Ziele von Spoiler und Duplicator anschaulich folgendermaßen beschrieben werden können:

- *Spoilers Ziel* ist es, zu zeigen, dass die beiden Strukturen (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) verschieden sind.
- *Duplicators Ziel* ist es, einen etwaigen Unterschied zwischen den beiden Strukturen zu vertuschen.

Folie 9

Gewinnstrategien

Eine *Strategie* für einen der beiden Spieler im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) ist eine Vorschrift, die ihm sagt, welchen Zug er als Nächstes machen soll. Formal:

- Eine *Strategie für Spoiler* ist eine Abbildung

$$f_{Sp} : \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \longrightarrow A \cup B.$$

Sind $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden gewählten Elemente, so gibt

$$f_{Sp}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i})$$

an, welches Element Spoiler in der $(i+1)$ -ten Runde wählen soll.

Folie 10

- Eine *Strategie für Duplicator* ist eine Abbildung

$$f_{Dupl} : \bigcup_{i=0}^{m-1} (A \times B)^i \times (A \cup B) \longrightarrow B \cup A,$$

so dass für alle $i \in \{0, \dots, m-1\}$, alle $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$, alle $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ und alle $c_{k+i+1} \in A \cup B$ gilt:

$$c_{k+i+1} \in A \iff f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1}) \in B.$$

Sind $a_{k+1}, \dots, a_{k+i} \in A$ und $b_{k+1}, \dots, b_{k+i} \in B$ die in den ersten i Runden und ist $c_{k+i+1} \in A \cup B$ das von Spoiler in Runde $i+1$ gewählte Element, so gibt

$$f_{Dupl}(a_{k+1}, b_{k+1}, \dots, a_{k+i}, b_{k+i}, c_{k+i+1})$$

an, welches Element Duplicator in der $(i+1)$ -ten Runde wählen soll.

- Eine *Gewinnstrategie* ist eine Strategie für einen der beiden Spieler, mit der er jede Partie des m -Runden EF-Spiels auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) gewinnt.

Folie 11

Per Induktion nach der Rundenzahl m lässt sich leicht nachweisen, dass stets einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt:

Satz 3.4. *Für alle relationalen Signaturen σ , alle σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} , alle $k \in \mathbb{N}$, alle $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$, alle $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in A$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Genau einer der beiden Spieler hat eine Gewinnstrategie im Spiel $EF_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.*

Beweis: Übung. □

Definition 3.5. (a) Wir sagen

Spoiler (bzw. Duplicator) *gewinnt* $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$,

falls er eine Gewinnstrategie im Spiel $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ besitzt.

(b) Wir schreiben $(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b})$, um auszudrücken, dass *Duplicator* eine Gewinnstrategie im Spiel $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$ besitzt.

Ist $k = 0$ (d.h. \bar{a} und \bar{b} sind leer), so schreiben wir kurz $\mathcal{A} \approx_m \mathcal{B}$ an Stelle von $(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b})$.

Folie 12

Beispiel 3.6.

Betrachte die linearen Ordnungen $\mathcal{A} = (A, \leq^A)$ und $\mathcal{B} = (B, \leq^B)$ mit $A = \{1, \dots, 8\}$ und $B = \{1, \dots, 9\}$, wobei \leq^A und \leq^B die natürlichen linearen Ordnungen auf A und B sind.

Seien außerdem $k := 2$ und $\bar{a} := a_1, a_2$ und $\bar{b} := b_1, b_2$ mit $a_1 = b_1 = 1$ und $a_2 = 8$ und $b_2 = 9$ vorgegeben.

Frage: Was ist die größte Zahl m , so dass gilt: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b})$?

Antwort: $(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_2 (\mathcal{B}, \bar{b})$ und $(\mathcal{A}, \bar{a}) \not\approx_3 (\mathcal{B}, \bar{b})$.

D.h.: Duplicator hat eine Gewinnstrategie im 2-Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) , und Spoiler hat eine Gewinnstrategie im 3-Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Folie 13

Dies lässt sich zu folgender Aussage verallgemeinern:

Satz 3.7. *Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} endliche lineare Ordnungen, sei $k := 2$, und sei $\bar{a} := a_1, a_2$ und $\bar{b} := b_1, b_2$, wobei a_1, b_1 die kleinsten und a_2, b_2 die größten Elemente in A und B bezüglich \leq^A und \leq^B sind.*

Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b}) \iff |A| = |B| \text{ oder } |A|, |B| > 2^m.$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) , wenn die Kardinalität von A und B gleich ist oder größer ist als 2^m .

Beweis.

„ \Leftarrow “:

Falls $|A| = |B|$, so sind \mathcal{A} und \mathcal{B} isomorph (beachte dazu: laut Voraussetzung sind A und B endlich). Sei $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von \mathcal{A} nach \mathcal{B} . Duplicator gewinnt das m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) , indem er in jeder Runde $i \in \{1, \dots, m\}$ einfach Spoilers Zug „kopiert“, d.h. er wählt $\pi(a_{k+i})$ (bzw. $\pi^{-1}(b_{k+i})$), wenn Spoiler in Runde i ein Element $a_{k+i} \in A$ (bzw. $b_{k+i} \in B$) wählt.

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass $|A| > 2^m$ und $|B| > 2^m$. Für jedes $C \in \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ betrachte die *Distanzfunktion* $Dist : C \times C \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$Dist(c, c') := |\{d \in C : c <^C d \leq^C c' \text{ oder } c' <^C d \leq^C c\}|$$

für alle $c, c' \in C$.

Folie 14

Wir zeigen nun, dass Duplicator so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(*)_i$ erfüllt ist:

$(*)_i$: Sind a_{2+1}, \dots, a_{2+i} und b_{2+1}, \dots, b_{2+i} die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B , so gilt für alle $j, j' \in \{1, \dots, 2+i\}$:

1. $a_j \leq^A a_{j'} \iff b_j \leq^B b_{j'}$ und
2. $Dist(a_j, a_{j'}) = Dist(b_j, b_{j'})$ oder $Dist(a_j, a_{j'}), Dist(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}$.

Der Beweis folgt per Induktion nach i .

Induktionsanfang: $i=0$

Die Bedingung $(*)_0$ ist erfüllt, denn laut Voraussetzung gilt:

$$Dist(a_1, a_2) = |A|-1 \geq 2^m \quad \text{und} \quad Dist(b_1, b_2) = |B|-1 \geq 2^m.$$

Induktionsschritt: $i \rightarrow i+1$

Gemäß Induktionsannahme sind bereits i Runden gespielt und die Bedingung $(*)_i$ ist nach der i -ten Runde erfüllt.

Fall 1: Spoiler wählt in der $(i+1)$ -ten Runde ein Element a_{2+i+1} in A . Falls $a_{2+i+1} = a_j$ für ein $j \in \{1, \dots, 2+i\}$, so antwortet Duplicator mit $b_{2+i+1} := b_j$ und bewirkt damit, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist. Ansonsten gibt es Indizes $j, j' \in \{1, \dots, 2+i\}$, so dass gilt:

- $a_j <^A a_{2+i+1} <^A a_{j'}$ und

- für alle $j'' \in \{1, \dots, 2+i\}$ gilt: $a_{j''} \leq^A a_j$ oder $a_{j'} \leq^A a_{j''}$.

Da $(*)_i$ gemäß Induktionsannahme erfüllt ist, gilt:

$$(1.) \quad \text{Dist}(a_j, a_{j'}) = \text{Dist}(b_j, b_{j'}) \quad \text{oder}$$

$$(2.) \quad \text{Dist}(a_j, a_{j'}), \text{Dist}(b_j, b_{j'}) \geq 2^{m-i}.$$

Im Fall (1.) gibt es ein Element b_{2+i+1} in B , so dass $b_j <^B b_{2+i+1} <^B b_{j'}$ und $\text{Dist}(b_j, b_{2+i+1}) = \text{Dist}(a_j, a_{2+i+1})$ und $\text{Dist}(b_{2+i+1}, b_{j'}) = \text{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'})$. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist, wenn Duplicator in der $(i+1)$ -ten Runde dieses b_{2+i+1} wählt.

Im Fall (2.) muss es mindestens ein Element $c \in B$ geben, so dass $b_j <^B c <^B b_{j'}$ und $\text{Dist}(b_j, c) \geq \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$ und $\text{Dist}(c, b_{j'}) \geq \frac{2^{m-i}}{2} = 2^{m-(i+1)}$.

- Falls $\text{Dist}(a_j, a_{2+i+1}) \geq 2^{m-(i+1)}$ und $\text{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'}) \geq 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator in der $(i+1)$ -ten Runde $b_{2+i+1} := c$.
- Falls $\text{Dist}(a_j, a_{2+i+1}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator das $b_{2+i+1} >^B b_j$ mit $\text{Dist}(b_j, b_{2+i+1}) = \text{Dist}(a_j, a_{2+i+1})$.
- Falls $\text{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'}) < 2^{m-(i+1)}$, so wählt Duplicator das $b_{2+i+1} <^B b_{j'}$ mit $\text{Dist}(b_{2+i+1}, b_{j'}) = \text{Dist}(a_{2+i+1}, a_{j'})$.

Man kann leicht nachprüfen, dass in jedem der 3 Fälle die Bedingung $(*)_{i+1}$ erfüllt ist.

Fall 2: Spoiler wählt in der $(i+1)$ -ten Runde ein Element b_{2+i+1} in B . Duplicators Antwort a_{2+i+1} in A wird analog zu Fall 1 ermittelt.

Damit sind wir fertig mit dem Induktionsschritt.

Wir haben also bewiesen, dass Duplicator, so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die Bedingung $(*)_i$ erfüllt ist.

Insbesondere ist nach Runde m die Bedingung $(*)_m$ erfüllt und Duplicator hat daher die Partie gewonnen.

Folie 15

„ \implies “:

Offensichtlich genügt es, Folgendes zu zeigen:

Falls $|A| < |B|$ und $|A| \leq 2^m$, so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im Spiel $\text{EF}_m(\mathcal{A}, \bar{a}, \mathcal{B}, \bar{b})$.

Dies kann man beweisen, indem man zeigt, dass Spoiler so spielen kann, dass für jedes $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ die folgende Invariante $(**)_{i+1}$ erfüllt ist.

(**)_i: Sind a_{2+1}, \dots, a_{2+i} und b_{2+1}, \dots, b_{2+i} die in den Runden $1, \dots, i$ gewählten Elemente in A und B , so gibt es $j, j' \in \{1, \dots, 2+i\}$, so dass gilt:

1. $(a_j <^A a_{j'} \text{ und } b_j \geq^B b_{j'})$ oder $(a_j \geq^A a_{j'} \text{ und } b_j <^B b_{j'})$
oder
2. $Dist(a_j, a_{j'}) < 2^{m-i}$ und $Dist(b_j, b_{j'}) < Dist(a_j, a_{j'})$.

Details: Übung.

□

3.2 Der Satz von Ehrenfeucht

Folie 16

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass ein enger Zusammenhang zwischen EF-Spielen und der Ausdrucksstärke der Logik erster Stufe besteht. Zur Formulierung dieses Zusammenhangs ist der folgende Begriff der *m-Äquivalenz* nützlich.

Zur Erinnerung: Die *Quantorentiefe* bzw. der *Quantorenrang* $qr(\varphi)$ einer Formel φ ist die maximale Anzahl von ineinander geschachtelten Quantoren, die in φ vorkommen.

Folie 17

Die *m*-Äquivalenz zweier Strukturen (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$)

Definition 3.8.

Sei σ eine Signatur, seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Strukturen und sei $m \in \mathbb{N}$.

- (a) \mathcal{A} und \mathcal{B} heißen *m-äquivalent* (kurz: $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B}$), falls sie die gleichen FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$ erfüllen, d.h. falls für alle FO[σ]-Sätze φ mit $qr(\varphi) \leq m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \mathcal{B} \models \varphi.$$

- (b) Allgemein schreiben wir für $k \in \mathbb{N}$ und Elemente $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B$

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$$

und sagen, dass (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) m -äquivalent sind, falls für alle FO[σ]-Formeln φ mit höchstens k freien Variablen und mit Quantortiefe $\text{qr}(\varphi) \leq m$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}].$$

Anschaulich bedeutet $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$ also, dass (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) sich durch FO-Formeln der Quantortiefe $\leq m$ nicht unterscheiden lassen (d.h., sie sehen aus Sicht dieser Formeln identisch aus).

Folie 18

Der Satz von Ehrenfeucht

Theorem 3.9 (Der Satz von Ehrenfeucht). *Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$. Dann gilt:*

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b}) \iff (\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b}).$$

D.h.: Duplicator hat genau dann eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) , wenn (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) nicht durch FO[σ]-Formeln der Quantortiefe $\leq m$ unterschieden werden können.

Umgekehrt heißt dies: Spoiler hat genau dann eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) , wenn es eine FO[σ]-Formel der Quantortiefe $\leq m$ gibt, die in (\mathcal{A}, \bar{a}) gilt, aber nicht in (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Wir werden den Satz von Ehrenfeucht durch eine Folge von Hilfssätzen beweisen. Vorher betrachten wir jedoch kurz eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht.

Folie 19

Eine Anwendung des Satzes von Ehrenfeucht

Aus der Richtung „ \implies “ des Satzes von Ehrenfeucht (Theorem 3.9) und der Richtung „ \impliedby “ von Satz 3.7 (Gewinnstrategie auf linearen Ordnungen) folgt direkt:

Satz 3.10 (Endliche lineare Ordnungen gerader Kardinalität).

Es gibt keinen FO[\leq]-Satz ψ , so dass für alle endlichen linearen Ordnungen \mathcal{B} gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade.

Beweis. Durch Widerspruch.

Angenommen, ψ ist ein $\text{FO}[\leq]$ -Satz, so dass für jede endliche lineare Ordnung \mathcal{B} gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade.

Sei $m := \text{qr}(\psi)$. Sei \mathcal{A} die endliche lineare Ordnung mit Universum $\{1, \dots, 2^m+1\}$ und sei \mathcal{B} die endliche lineare Ordnung mit Universum $\{1, \dots, 2^m+2\}$, wobei $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ die natürlichen linearen Ordnungen auf \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} sind. Da $|A|$ ungerade und $|B|$ gerade ist, gilt: $\mathcal{A} \not\models \psi$ und $\mathcal{B} \models \psi$. Somit gilt: $\mathcal{A} \not\equiv_m \mathcal{B}$. Daraus folgt direkt, dass auch

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \not\equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b}), \quad (3.1)$$

für alle Listen \bar{a} bzw. \bar{b} von Elementen in A bzw. B gilt.

Wir wählen hier speziell die Listen $\bar{a} := a_1, a_2$ und $\bar{b} := b_1, b_2$, bei denen a_1, b_1 bzw. a_2, b_2 die kleinsten bzw. größten Elemente bzgl. $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ sind. Wegen $|A|, |B| > 2^m$ folgt aus der Richtung „ \Leftarrow “ von Satz 3.7, dass $(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b})$. Aus der Richtung „ \Rightarrow “ von Theorem 3.9 folgt dann:

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b}).$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.1) □

Der Rest von Abschnitt 3.2 ist dem Beweis des Satzes von Ehrenfeucht (Theorem 3.9) gewidmet.

Folie 20

Beweis der Richtung „ \Rightarrow “ des Satzes von Ehrenfeucht

Die Richtung „ \Rightarrow “ folgt direkt aus dem nächsten Satz, dessen Aussage die Kontraposition der Richtung „ \Rightarrow “ von Theorem 3.9 darstellt.

Satz 3.11.

Sei σ eine relationale Signatur und seien \mathcal{A}, \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, sei $m \in \mathbb{N}$, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und sei $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$. Falls es eine $\text{FO}[\sigma]$ -Formel $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ mit $\text{frei}(\varphi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$ und $\text{qr}(\varphi) \leq m$ gibt, so dass

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_k],$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Beweisidee:

Zunächst illustrieren wir die Beweisidee an einem Beispiel. Betrachte dazu die Formel

$$\varphi := \exists x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \vee E(x_1, x_2))$$

und die beiden Graphen \mathcal{A}, \mathcal{B} aus Beispiel 3.2(a).



Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi$, d.h. $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

Klar:

$$\neg\varphi \equiv \forall x_1 \exists x_2 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg E(x_1, x_2)).$$

Also gilt:

$$\mathcal{A} \models \exists x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \vee E(x_1, x_2)) \quad (3.2)$$

und

$$\mathcal{B} \models \forall x_1 \exists x_2 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg E(x_1, x_2)) \quad (3.3)$$

Eine Gewinnstrategie für Spoiler im 2-Runden EF-Spiel auf \mathcal{A} und \mathcal{B} lässt sich daran direkt ablesen — Spoiler gewinnt, indem er wie folgt „die Formel φ ausspielt“:

Wegen (3.2) kann Spoiler in Runde 1 ein $a_1 \in \mathcal{A}$ wählen, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \left(\forall x_2 (x_1 = x_2 \vee E(x_1, x_2)) \right) [a_1] \quad (3.4)$$

Dieses a_1 ist gerade der Knoten „in der Mitte“ des Graphen \mathcal{A} , d.h. der Knoten, der Kanten zu allen anderen Knoten von \mathcal{A} besitzt.

Wegen (3.3) gilt dann für jedes Element $b_1 \in \mathcal{B}$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten könnte, dass

$$\mathcal{B} \models \left(\exists x_2 (\neg x_1 = x_2 \wedge \neg E(x_1, x_2)) \right) [b_1] \quad (3.5)$$

In Runde 2 kann Spoiler daher ein Element $b_2 \in \mathcal{B}$ auswählen, für das gilt:

$$\mathcal{B} \models \left(\neg x_1 = x_2 \wedge \neg E(x_1, x_2) \right) [b_1, b_2] \quad (3.6)$$

Wegen (3.4) gilt für jedes Element $a_2 \in A$, mit dem Duplicator in Runde 2 antworten könnte, dass

$$\mathcal{A} \models \left(x_1 = x_2 \vee E(x_1, x_2) \right) [a_1, a_2] \quad (3.7)$$

Am Ende der Partie wissen wir gemäß (3.7) und (3.6) also, dass Folgendes gilt:

$$\left(a_1 = a_2 \text{ oder } (a_1, a_2) \in E^{\mathcal{A}} \right) \text{ und } \left(b_1 \neq b_2 \text{ und } (b_1, b_2) \notin E^{\mathcal{B}} \right)$$

Falls $a_1 = a_2$ ist, so ist Teil (1) der Gewinnbedingung für Duplicator verletzt; falls $(a_1, a_2) \in E^{\mathcal{A}}$ ist, so ist Teil (2) der Gewinnbedingung für Duplicator verletzt. Also gewinnt Spoiler jede Partie des 2-Runden EF-Spiels auf \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Somit hat Spoiler eine Gewinnstrategie im 2-Runden EF-Spiel auf \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Folie 22

Beweis von Satz 3.11:

Wir führen den Beweis per Induktion über den Aufbau von Formeln. Es seien eine relationale Signatur σ und zwei σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} gegeben. Die Aussage $\mathbb{A}(\varphi)$, die wir für alle FO[σ]-Formeln φ beweisen wollen, besagt Folgendes:

Für alle $m, k \in \mathbb{N}$, alle $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und alle $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$ gilt:

Falls $\text{qr}(\varphi) \leq m$ und $|\text{frei}(\varphi)| \leq k$ und

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_k] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_k],$$

so hat Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Um $\mathbb{A}(\varphi)$ für eine gegebene Formel φ zu beweisen, seien im Folgenden $m, k \in \mathbb{N}$, $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} = b_1, \dots, b_k \in B$ beliebig gewählt. Es genügt, den Fall zu betrachten, in dem gilt:

$$(*) \quad m \geq \text{qr}(\varphi), \quad k \geq |\text{frei}(\varphi)| \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\bar{b}],$$

denn andernfalls muss gemäß der Formulierung von $\mathbb{A}(\varphi)$ nichts gezeigt werden.

Ziel ist, zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) hat.

Induktionsanfang: Sei φ atomar. Da σ eine *relationale* Signatur ist, ist jede atomare σ -Formel von einer der beiden im Folgenden betrachteten Formen.

- φ ist von der Form $x_{i_1} = x_{i_2}$, mit $i_1, i_2 \in \{1, \dots, k\}$

Wegen (*) gilt dann insbesondere:

$$a_{i_1} = a_{i_2} \iff b_{i_1} \neq b_{i_2}.$$

Somit ist Duplicators Gewinnbedingung (1) verletzt, und Spoiler gewinnt jede Partie des m -Runden EF-Spiels auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

- φ ist von der Form $R(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$, wobei $R \in \sigma$, $r := \text{ar}(R)$ und $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, k\}$.

Wegen (*) gilt dann insbesondere:

$$(a_{i_1}, \dots, a_{i_r}) \in R^{\mathcal{A}} \iff (b_{i_1}, \dots, b_{i_r}) \notin R^{\mathcal{B}}.$$

Somit ist Duplicators Gewinnbedingung (2) verletzt, und Spoiler gewinnt jede Partie des m -Runden EF-Spiels auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Induktionsschritt: Sei φ eine beliebige nicht-atomare $\text{FO}[\sigma]$ -Formel. Da der Allquantor \forall und die Junktoren \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow durch Kombination des Existenzquantors \exists und der Junktoren \neg und \vee ausgedrückt werden können, genügt es, im Folgenden nur die Fälle zu betrachten, in denen φ von einer der folgenden Formen ist: $\exists y \psi$, $\neg\psi$, $(\psi_1 \vee \psi_2)$.

- **Fall 1:** φ ist von der Form $\exists y \psi$.

Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathbb{A}(\psi)$.

Unser Ziel ist, zu zeigen, dass Spoiler eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) hat.

Gemäß (*) gilt: $m \geq \text{qr}(\varphi)$, $k \geq |\text{frei}(\varphi)|$, $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\bar{b}]$.

Fall 1.1: $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}]$ und $\mathcal{B} \not\models \varphi[\bar{b}]$.

Da φ von der Form $\exists x \psi$ ist, gilt also:

$$\mathcal{A} \models (\exists x \psi) [\bar{a}] \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \models (\forall x \neg\psi) [\bar{b}]$$

Somit gibt es ein $a_{k+1} \in A$, so dass gilt: $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, a_{k+1}]$.

Und für jedes $b_{k+1} \in B$ gilt: $\mathcal{B} \models \neg\psi[\bar{b}, b_{k+1}]$.

Spoiler kann daher in Runde 1 ein $a_{k+1} \in A$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, a_{k+1}]$ wählen. Für jedes $b_{k+1} \in B$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten kann, gilt: $\mathcal{B} \models \neg\psi[\bar{b}, b_{k+1}]$.

Es gilt:

- $\text{qr}(\psi) = \text{qr}(\varphi) - 1 \leq m-1 =: m'$,
- $|\text{frei}(\psi)| \leq |\text{frei}(\varphi)| + 1 \leq k+1 =: k'$, und
- für $\bar{a}' := a_1, \dots, a_k, a_{k+1}$ und $\bar{b}' := b_1, \dots, b_k, b_{k+1}$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}'] \quad \text{und} \quad \mathcal{B} \not\models \psi[\bar{b}'].$$

Da $\mathbb{A}(\psi)$ gemäß Induktionsannahme gilt, hat Spoiler daher eine Gewinnstrategie im m' -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}') und (\mathcal{B}, \bar{b}') .

Für das m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) erhält Spoiler daher eine Gewinnstrategie, indem er in Runde 1 ein $a_{k+1} \in A$ wählt, so dass gilt: $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}, a_{k+1}]$.

Für jedes $b_{k+1} \in B$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten kann, spielt Spoiler die restlichen $m' = m-1$ Runden dann gemäß seiner Gewinnstrategie im $(m-1)$ -Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \bar{a}, a_{k+1})$ und $(\mathcal{B}, \bar{b}, b_{k+1})$.

Fall 1.2: $\mathcal{B} \models \varphi[\bar{b}]$ und $\mathcal{A} \not\models \varphi[\bar{a}]$.

Da φ von der Form $\exists x \psi$ ist, gilt also:

$$\mathcal{B} \models (\exists x \psi) [\bar{b}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A} \models (\forall x \neg \psi) [\bar{a}]$$

Somit gibt es ein $b_{k+1} \in B$, so dass gilt: $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}, b_{k+1}]$.

Und für jedes $a_{k+1} \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \neg \psi[\bar{a}, a_{k+1}]$.

Spoiler kann daher in Runde 1 ein $b_{k+1} \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[\bar{b}, b_{k+1}]$ wählen. Für jedes $a_{k+1} \in A$, mit dem Duplicator in Runde 1 antworten kann, gilt: $\mathcal{A} \models \neg \psi[\bar{a}, a_{k+1}]$.

Genau wie in Fall 1.1 hat Spoiler gemäß Induktionsannahme eine Gewinnstrategie im $(m-1)$ -Runden EF-Spiel auf $(\mathcal{A}, \bar{a}, a_{k+1})$ und $(\mathcal{B}, \bar{b}, b_{k+1})$.

Insgesamt liefert dies eine Gewinnstrategie für Spoiler im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

- **Fall 2:** φ ist von der Form $\neg \psi$.

Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathbb{A}(\psi)$.

Gemäß (*) gilt: $m \geq \text{qr}(\varphi)$, $k \geq |\text{frei}(\varphi)|$, $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\bar{b}]$.

Da φ von der Form $\neg \psi$ ist, gilt:

$$\text{qr}(\psi) = \text{qr}(\varphi), \quad \text{frei}(\psi) = \text{frei}(\varphi), \quad \mathcal{A} \not\models \psi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}].$$

Da $\mathbb{A}(\psi)$ gemäß Induktionsannahme gilt, hat Spoiler also eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

- **Fall 3:** φ ist von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$.

Gemäß Induktionsannahme gilt $\mathbb{A}(\psi_1)$ und $\mathbb{A}(\psi_2)$.

Gemäß (*) gilt: $m \geq \text{qr}(\varphi)$, $k \geq |\text{frei}(\varphi)|$, $\mathcal{A} \models \varphi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \varphi[\bar{b}]$.

Da φ von der Form $(\psi_1 \vee \psi_2)$ ist, sieht man leicht, dass es ein $i \in \{1, 2\}$ geben muss, so dass gilt:

$$\mathcal{A} \models \psi_i[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \not\models \psi_i[\bar{b}]$$

Außerdem gilt: $\text{qr}(\psi_i) \leq \text{qr}(\varphi) \leq m$, und $|\text{frei}(\psi_i)| \leq |\text{frei}(\varphi)| \leq k$.

Da $\mathbb{A}(\psi_i)$ gemäß Induktionsannahme gilt, hat Spoiler also eine Gewinnstrategie im m -Runden EF-Spiel auf (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) .

Dies beendet den Beweis von Satz 3.11 und damit auch den Beweis der Richtung „ \implies “ von Theorem 3.9. □

Folie 23

Beweis der Richtung „ \impliedby “ des Satzes von Ehrenfeucht

Zum Beweis der Richtung „ \impliedby “ von Theorem 3.9 nutzen wir die wie folgt definierten *Hintikka-Formeln*.

Definition 3.12 (Hintikka-Formeln). Sei σ eine endliche relationale Signatur, sei \mathcal{A} eine σ -Struktur, sei $k \in \mathbb{N}$, sei $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$ eine Folge von Elementen aus A und sei $\bar{x} := x_1, \dots, x_k$ eine Folge von k verschiedenen FO-Variablen. Wir definieren rekursiv für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Formel $\varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m(\bar{x})$, die wir als *m -Hintikka-Formel* (bzw. *m -Isomorphietyp*) von \bar{a} in \mathcal{A} bezeichnen, wie folgt:

Folie 24

- $\varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^0(\bar{x})$ ist die Konjunktion aller Formeln ψ , für die gilt:

ψ ist eine atomare oder eine negierte atomare FO[σ]-Formel mit $\text{frei}(\psi) \subseteq \{x_1, \dots, x_k\}$, so dass $\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}]$.

Beachte: Da σ endlich ist, gibt es nur endlich viele solche Formeln ψ .

- Für $m > 0$ setzen wir

$$\varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m(\bar{x}) := \left(\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1} \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a'}^{m-1}(\bar{x}, x_{k+1}) \right) \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a' \in A} \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a'}^{m-1}(\bar{x}, x_{k+1}).$$

Präzise ist mit $\bigwedge_{a' \in A} \exists x_{k+1} \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a'}^{m-1}(\bar{x}, x_{k+1})$ gemeint, dass wir für die

Menge $M := \{ \exists x_{k+1} \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a'}^{m-1}(\bar{x}, x_{k+1}) : a' \in A \}$ die Konjunktion bilden, in der jede Formel aus M genau einmal vorkommt.

Analoges gilt auch für $\bigvee_{a' \in A} \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a'}^{m-1}(\bar{x}, x_{k+1})$.

Folie 25

Bemerkung 3.13.

- (a) Für alle endlichen relationalen Signaturen σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ ist die Menge

$$m\text{-Typen}_k[\sigma] := \left\{ \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m(\bar{x}) : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur} \right. \\ \left. \text{und } \bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A \right\}$$

endlich.

Für $m = 0$ gilt das, da es nur endlich viele verschiedene atomare $\text{FO}[\sigma]$ -Formeln über den Variablen x_1, \dots, x_k gibt. Für $m > 0$ folgt die Endlichkeit dann per Induktion.

Insbes. folgt dadurch, dass auch für unendliche Strukturen A und $m > 0$ die Konjunktion $\bigwedge_{a' \in A}$ und die Disjunktion $\bigvee_{a' \in A}$ jeweils nur endlich viele verschiedene Formeln enthält. Wir können daher die m -Hintikka-Formel $\varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m$ als $\text{FO}[\sigma]$ -Formel auffassen.

- (b) Die m -Hintikka-Formel $\varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m$ hat die *Quantorentiefe* m , und es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m[\bar{a}]$. Dies folgt leicht per Induktion nach m .
- (c) In der Definition der m -Hintikka-Formeln ist $k = 0$ erlaubt. Die m -Hintikka-Formel ist dann ein $\text{FO}[\sigma]$ -Satz $\varphi_{\mathcal{A}}^m$ der Quantorentiefe m , für den gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathcal{A}}^m$.

Folie 26

Die für den Beweis der Richtung „ \Leftarrow “ von Theorem 3.9 zentrale Beobachtung wird im folgenden Satz zusammengefasst.

Satz 3.14 (Hintikka-Formeln beschreiben Gewinnstrategien für Duplicator). *Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B$. Dann gilt:*

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b}) \iff \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m[\bar{b}].$$

Beweis. Per Induktion nach m .

Induktionsanfang $m = 0$: Es gilt:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_0 (\mathcal{B}, \bar{b}) \\ \iff & \text{Duplicator hat eine Gewinnstrategie im 0-Runden EF-Spiel auf } (\mathcal{A}, \bar{a}) \text{ und } (\mathcal{B}, \bar{b}) \\ \text{Gewinnbed.} \iff & \text{Für alle } j, j' \in \{1, \dots, k\} \text{ gilt } (a_j = a_{j'} \iff b_j = b_{j'}), \\ & \text{und für alle } R \in \sigma, \text{ für } r := \text{ar}(R) \text{ und für alle } \\ & j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, k\} \text{ gilt} \\ & ((a_{j_1}, \dots, a_{j_r}) \in R^{\mathcal{A}} \iff (b_{j_1}, \dots, b_{j_r}) \in R^{\mathcal{B}}) \\ \iff & \text{Für alle atomaren FO}[\sigma]\text{-Formeln } \psi \text{ mit } \text{frei}(\psi) \subseteq \\ & \{x_1, \dots, x_k\} \text{ gilt } (\mathcal{A} \models \psi[\bar{a}] \iff \mathcal{B} \models \psi[\bar{b}]) \\ \text{Def. } \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^0 \iff & \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^0[\bar{b}] \end{aligned}$$

Induktionsschritt $(m-1) \rightarrow m$: Es gilt:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b}) \\ \iff & \text{Duplicator hat eine Gewinnstrategie im } m\text{-Runden EF-Spiel auf } (\mathcal{A}, \bar{a}) \text{ und } (\mathcal{B}, \bar{b}) \\ \text{Spielregeln} \iff & \text{für alle } a_{k+1} \in A \text{ gibt es ein } b_{k+1} \in B, \text{ so dass Duplicator} \\ & \text{eine Gewinnstrategie im } (m-1)\text{-Runden EF-Spiel auf} \\ & (\mathcal{A}, \bar{a}, a_{k+1}) \text{ und } (\mathcal{B}, \bar{b}, b_{k+1}) \text{ hat, und} \\ & \text{für alle } b_{k+1} \in B \text{ gibt es ein } a_{k+1} \in A, \text{ so dass Duplicator} \\ & \text{eine Gewinnstrategie im } (m-1)\text{-Runden EF-Spiel auf} \\ & (\mathcal{A}, \bar{a}, a_{k+1}) \text{ und } (\mathcal{B}, \bar{b}, b_{k+1}) \text{ hat} \\ \text{Ind.annahme} \iff & \text{für alle } a_{k+1} \in A \text{ gibt es ein } b_{k+1} \in B, \text{ so dass} \\ & \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a_{k+1}}^{m-1}[\bar{b}, b_{k+1}], \text{ und} \\ & \text{für alle } b_{k+1} \in B \text{ gibt es ein } a_{k+1} \in A, \text{ so dass} \\ & \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}, a_{k+1}}^{m-1}[\bar{b}, b_{k+1}] \\ \text{Def. } \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m \iff & \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m[\bar{b}]. \quad \square \end{aligned}$$

Beweis der Richtung „ \Leftarrow “ von Theorem 3.9:

Folie 27

Gemäß Voraussetzung gilt $(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b})$, d.h. (\mathcal{A}, \bar{a}) und (\mathcal{B}, \bar{b}) erfüllen dieselben FO[σ]-Formeln der Quantorentiefe $\leq m$.

Da die m -Hintikka-Formel $\varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m(\bar{x})$ die Quantorentiefe m hat, und da $\mathcal{A} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m[\bar{a}]$ gilt (siehe Bemerkung 3.13), gilt auch $\mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m[\bar{b}]$.

Gemäß der Richtung „ \Leftarrow “ von Satz 3.14 gilt also $(\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b})$. \square

Folie 28

Zusammenfassung

Theorem 3.9 und Satz 3.14 besagen zusammen:

Korollar 3.15. *Sei σ eine endliche relationale Signatur, seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Strukturen, seien $k, m \in \mathbb{N}$ und seien $\bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A$ und $\bar{b} := b_1, \dots, b_k \in B$. Dann gilt:*

$$(\mathcal{A}, \bar{a}) \equiv_m (\mathcal{B}, \bar{b}) \iff (\mathcal{A}, \bar{a}) \approx_m (\mathcal{B}, \bar{b}) \iff \mathcal{B} \models \varphi_{\mathcal{A}, \bar{a}}^m[\bar{b}].$$

Folie 29

Zusammen mit Bemerkung 3.13 folgt dann insbesondere, dass es für jede endliche relationale Signatur σ bis auf logische Äquivalenz für jedes $m \in \mathbb{N}$ nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Sätze der Quantorentiefe $\leq m$ gibt. Genauer:

Korollar 3.16.

Für jede endliche relationale Signatur σ und alle $k, m \in \mathbb{N}$ gilt:

- (a) *Die Relation \equiv_m besitzt nur endlich viele Äquivalenzklassen auf der Klasse $\{(\mathcal{A}, \bar{a}) : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma\text{-Struktur und } \bar{a} := a_1, \dots, a_k \in A\}$.*
- (b) *Bis auf logische Äquivalenz gibt es nur endlich viele verschiedene FO[σ]-Formeln mit $\leq k$ freien Variablen und Quantorentiefe $\leq m$.*

Beweis. (a): Die Äquivalenzklassen von \equiv_m werden gemäß Korollar 3.15 gerade durch die m -Hintikka-Formeln, d.h. durch die Formeln der Menge m -Typen $_k[\sigma]$ beschrieben, und davon gibt es laut Bemerkung 3.13(a) nur endlich viele.

(b): Übung. \square

3.3 Kompositionslemmata

Unter gewissen Umständen ist es möglich, Gewinnstrategien für Duplicator auf „kleinen“ Strukturen zu Gewinnstrategien für Duplicator auf größeren Strukturen zusammenzusetzen. Die folgenden *Kompositionslemmata* fassen einige einfache Situationen zusammen, in denen dies möglich ist.

Kompositionslemma für die Vereinigung disjunkter Strukturen

Notation 3.17. Sei σ eine relationale Signatur.

Zwei σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} heißen *disjunkt*, falls ihre Universen disjunkt sind. Für disjunkte σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} schreiben wir $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, um die σ -Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $R^A \cup R^B$ interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ ist die *disjunkte Vereinigung* von \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Lemma 3.18. Sei σ eine relationale Signatur, seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ zwei disjunkte σ -Strukturen und seien $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ zwei disjunkte σ -Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \text{ und } \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \implies \mathcal{A}_1 \sqcup \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2.$$

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.19. Die Signatur $\sigma := \{R, B\}$ bestehe aus zwei einstelligigen Relationssymbolen R (für „rote Knoten“) und B (für „blaue Knoten“). Für $k, \ell \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_{k,\ell}$ eine σ -Struktur, die aus k roten und ℓ blauen Knoten besteht, d.h. $\mathcal{A}_{k,\ell}$ ist die disjunkte Vereinigung der k -elementigen Menge $R^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$ und der ℓ -elementigen Menge $B^{\mathcal{A}_{k,\ell}}$.

Für alle Zahlen $k_1, \ell_1, k_2, \ell_2 \in \mathbb{N}$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left. \begin{array}{l} (k_1 = k_2 \text{ oder } k_1, k_2 \geq m) \\ \text{und} \\ (\ell_1 = \ell_2 \text{ oder } \ell_1, \ell_2 \geq m) \end{array} \right\} \implies \mathcal{A}_{k_1, \ell_1} \approx_m \mathcal{A}_{k_2, \ell_2}.$$

Unter Verwendung von Lemma 3.18 erhält man einen kurzen Beweis für diese Aussage.

Auch die Richtung „ \Leftarrow “ gilt und lässt sich leicht durch Angabe einer Gewinnstrategie für Spoiler beweisen.

Details: Übung.

Kompositionslemma für das kartesische Produkt

Notation 3.20. Sei σ eine funktionenfreie Signatur.

Für zwei σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} schreiben wir $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, um die σ -Struktur mit Universum $A \times B$ zu bezeichnen, bei der jedes Konstantensymbol $c \in \sigma$ mit $(c^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{B}})$ und jedes Relationssymbol $R \in \sigma$ mit $r := \text{ar}(R)$ mit

$$\{ ((a_1, b_1), \dots, (a_r, b_r)) : (a_1, \dots, a_r) \in R^{\mathcal{A}} \text{ und } (b_1, \dots, b_r) \in R^{\mathcal{B}} \}$$

interpretiert wird. Wir sagen auch: $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ist das *kartesische Produkt* (oder *Tensorprodukt*) von \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Lemma 3.21. Sei σ eine relationale Signatur und seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ vier σ -Strukturen. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{A}_1 \approx_m \mathcal{B}_1 \text{ und } \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_2 \quad \implies \quad \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \approx_m \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2.$$

Beweis. Übung. □

Beispiel 3.22. Die Signatur $\sigma := \{S_v, S_h\}$ bestehe aus zwei 2-stelligen Relationssymbolen S_v und S_h (für „vertikale“ und „horizontale“ Kanten). Für $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ist das $(k \times \ell)$ -Gitter $\mathcal{G}_{k,\ell}$ die σ -Struktur mit Universum $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, \ell\}$ und Relationen

$$\begin{aligned} S_v^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \{ ((i, j), (i+1, j)) : 1 \leq i < k, 1 \leq j \leq \ell \}, \\ S_h^{\mathcal{G}_{k,\ell}} &:= \{ ((i, j), (i, j+1)) : 1 \leq i \leq k, 1 \leq j < \ell \}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von Lemma 3.21 erhält man einen kurzen Beweis dafür, dass es keinen FO[σ]-Satz φ gibt, der die Gitter *quadratischer* Größe beschreibt, d.h. bei dem für alle $k, \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt: $\mathcal{G}_{k,\ell} \models \varphi \iff k = \ell$.

Details: Übung.

Kompositionslemma für die Konkatenation linear geordneter Strukturen

Notation 3.23. Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol \leq enthält. Für zwei linear geordnete,¹ disjunkte σ -Strukturen \mathcal{A} und \mathcal{B} schreiben wir $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$, um die linear geordnete σ -Struktur mit Universum $A \cup B$ zu bezeichnen, bei der jedes Relationssymbol $R \in \sigma \setminus \{\leq\}$ mit $R^A \cup R^B$ interpretiert wird, und bei der $\leq^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}}$ die natürliche Erweiterung von $\leq^{\mathcal{A}}$ und $\leq^{\mathcal{B}}$ auf $A \cup B$ ist, bei der jedes Element aus A kleiner als jedes Element aus B ist, d.h.:

$$\leq^{\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}} = \leq^{\mathcal{A}} \cup \leq^{\mathcal{B}} \cup (A \times B).$$

Wir sagen auch: $\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}$ ist die *Konkatenation* von \mathcal{A} und \mathcal{B} .

Lemma 3.24. Sei σ eine relationale Signatur, die das Symbol \leq enthält. Seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ linear geordnete σ -Strukturen, so dass gilt: \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 sind disjunkt, \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 sind disjunkt, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ besitzen maximale Elemente a_1, a_2, b_1, b_2 bzgl. $\leq^{\mathcal{A}_1}, \leq^{\mathcal{A}_2}, \leq^{\mathcal{B}_1}, \leq^{\mathcal{B}_2}$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_1, a_1) \approx_m (\mathcal{B}_1, b_1) \quad \text{und} \quad (\mathcal{A}_2, a_2) \approx_m (\mathcal{B}_2, b_2) &\implies \\ (\mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2, a_1, a_2) \approx_m (\mathcal{B}_1 \cdot \mathcal{B}_2, b_1, b_2). & \end{aligned}$$

Beweis. Übung. □

Folie 36

Im nächsten Abschnitt werden wir dieses Lemma beim Beweis des *Satzes von McNaughton und Papert* benutzen, der eine logische Charakterisierung der sternfreien regulären Sprachen liefert.

3.4 Der Satz von McNaughton und Papert

Folie 37

Sternfreie reguläre Ausdrücke

In diesem Abschnitt sei Σ stets ein endliches, nicht-leeres Alphabet.

Definition 3.25 (sternfreie reguläre Ausdrücke).

Die Klasse SFR_Σ aller *sternfreien regulären Ausdrücke* über Σ ist rekursiv wie folgt definiert:

- (1) Das Symbol \emptyset gehört zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\emptyset) := \emptyset$.

¹Eine σ -Struktur \mathcal{A} heißt *linear geordnet*, falls $\leq^{\mathcal{A}}$ eine lineare Ordnung auf \mathcal{A} ist.

(2) Für jedes $a \in \Sigma$ gehört das Symbol a zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(a) := \{a\}$.

(3) Sind $r \in \text{SFR}_\Sigma$ und $s \in \text{SFR}_\Sigma$, so gehört auch

- $(r \mid s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \mid s)) := L(r) \cup L(s)$,
- $(r \cdot s)$ zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L((r \cdot s)) := L(r) \cdot L(s)$, wobei die Konkatenation $L_1 \cdot L_2$ zweier Sprachen $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ definiert ist als $L_1 \cdot L_2 := \{uv : u \in L_1, v \in L_2\}$,
- \bar{r} zu SFR_Σ und beschreibt die Sprache $L(\bar{r}) := \Sigma^* \setminus L(r)$.

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *sternfrei regulär*, falls es ein $r \in \text{SFR}_\Sigma$ gibt mit $L = L(r)$.

Beispiele.

(a) Für $\Sigma = \{a, b\}$ wird die durch den regulären Ausdruck $(a \mid b)^* a (a \mid b)^* b$ definierte Sprache durch den sternfreien regulären Ausdruck

$$((\bar{\emptyset} \cdot a) \cdot (\bar{\emptyset} \cdot b))$$

beschrieben.

(b) Für $\Sigma = \{a, b, c\}$ wird die durch den regulären Ausdruck $(a \mid b)^*$ beschriebene Sprache durch den sternfreien regulären Ausdruck

$$r := \overline{((\bar{\emptyset} \cdot c) \cdot \bar{\emptyset})}$$

beschrieben. Entsprechend wird die durch den regulären Ausdruck $(a \mid b)^* a (a \mid b)^* b$ definierte Sprache durch den sternfreien regulären Ausdruck

$$((r \cdot a) \cdot (r \cdot b))$$

beschrieben.

Der Satz von McNaughton und Papert (1971)

Definition 3.26. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ heißt *FO-definierbar*, falls es einen FO[σ_Σ]-Satz φ gibt, der L beschreibt, d.h. für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff \mathcal{A}_w \models \varphi$.

Theorem 3.27 (Satz von McNaughton und Papert).

Für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^$ gilt:*

L ist sternfrei regulär $\iff L$ ist FO-definierbar.

Beweis.

Folie 39

„ \implies “: Per Induktion über den Aufbau der Menge SFR_Σ kann man leicht zeigen, dass es für jedes $r \in \text{SFR}_\Sigma$ einen FO[σ_Σ]-Satz φ_r gibt, der die Sprache $L(r)$ beschreibt. Details: *Übung*.

Folie 40

„ \impliedby “: Wir erweitern die Signatur σ_Σ um ein Konstantensymbol max , setzen $\sigma'_\Sigma := \sigma_\Sigma \cup \{max\}$ und bezeichnen mit \mathcal{A}'_w die σ'_Σ -Expansion von \mathcal{A}_w , bei der max durch $|w|$ (also durch das größte Element von A_w bzgl. $\leq^{\mathcal{A}_w}$) interpretiert wird. Die von einem FO[σ'_Σ]-Satz φ beschriebene Sprache $L(\varphi)$ ist definiert als $L(\varphi) := \{w \in \Sigma^+ : \mathcal{A}'_w \models \varphi\}$. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sagen wir, dass L durch φ beschrieben wird, falls für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$ gilt: $w \in L \iff w \in L(\varphi)$.

Per Induktion nach der Quantorentiefe m zeigen wir, dass es für jeden FO[σ'_Σ]-Satz φ einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\varphi \in \text{SFR}_\Sigma$ gibt, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt. Wegen $\sigma'_\Sigma \supseteq \sigma_\Sigma$ ist dann auch die Richtung „ \impliedby “ des Satzes von McNaughton und Papert bewiesen.

Da der Allquantor \forall und die Junktoren \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow durch Kombination des Existenzquantors \exists und der Junktoren \neg und \vee ausgedrückt werden können, genügt es, im Folgenden nur die Fälle zu betrachten, in denen in φ keins der Symbole \forall , \wedge , \rightarrow , \leftrightarrow vorkommt.

Induktionsanfang $m = 0$:

Sei φ ein FO[σ'_Σ]-Satz der Quantorentiefe $m = 0$.

Fall 1: φ ist von der Form $P_a(max)$ für ein $a \in \Sigma$.

Dann ist $L(\varphi) = \Sigma^* \cdot \{a\}$ und wird durch den sternfreien regulären Ausdruck $(\emptyset \cdot a)$ beschrieben.

Fall 2: φ ist von der Form $max = max$ oder von der Form $max \leq max$.

Dann ist $L(\varphi) = \Sigma^+$ und wird durch den sternfreien regulären Ausdruck $(a_1 \mid \cdots \mid a_\ell) \cdot \bar{\emptyset}$ beschrieben, für $\Sigma = \{a_1, \dots, a_\ell\}$.

Fall 3: φ ist von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, für FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Sätze φ_1 und φ_2 . Per Induktion (über den Aufbau der Menge aller FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Sätze der Quantorentiefe 0) gibt es für jedes $i \in \{1, 2\}$ ein $r_{\varphi_i} \in \text{SFR}_\Sigma$, so dass φ_i die Sprache $L(r_{\varphi_i})$ beschreibt.

Wegen $L(\varphi) = L(\varphi_1) \cup L(\varphi_2)$ gilt dann: Für $r_\varphi := (r_{\varphi_1} \mid r_{\varphi_2})$ beschreibt φ die Sprache $L(r_\varphi)$.

Fall 4: φ ist von der Form $\neg\varphi_1$, für einen FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Satz φ_1 .

Per Induktion (über den Aufbau der Menge aller FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Sätze der Quantorentiefe 0) gibt es ein $r_{\varphi_1} \in \text{SFR}_\Sigma$, so dass φ_1 die Sprache $L(r_{\varphi_1})$ beschreibt.

Wegen $L(\varphi) = \Sigma^+ \setminus L(\varphi_1)$ gilt dann: Für $r_\varphi := \overline{r_{\varphi_1}}$ beschreibt φ die Sprache $L(r_\varphi)$.

Folie 41

Induktionsschritt $m \rightarrow m+1$: Sei $m \geq 0$.

Induktionsannahme: Für jeden FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Satz ψ der Quantorentiefe $\leq m$ gibt es ein $r_\psi \in \text{SFR}_\Sigma$, so dass ψ die Sprache $L(r_\psi)$ beschreibt.

Behauptung: Für jeden FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Satz φ der Quantorentiefe $m+1$ gibt es ein $r_\varphi \in \text{SFR}_\Sigma$, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Beweis: Per Induktion nach dem Aufbau von FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Sätzen der Quantorentiefe $m+1$.

Folie 42

Bevor wir den (schwierigen) Induktionsanfang betrachten, behandeln wir zunächst den (trivialen) Induktionsschritt.

Induktionsschritt: Hier betrachten wir den Fall, dass φ von der Form $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$ oder von der Form $\neg\varphi_1$ ist, wobei φ_1 und φ_2 FO $[\sigma'_\Sigma]$ -Sätze der Quantorentiefe $\leq m+1$ sind, für die gemäß Induktionsannahme bereits bekannt ist, dass es für jedes $i \in \{1, 2\}$ einen sternfreien regulären Ausdruck r_{φ_i} gibt, so dass φ_i die Sprache $L(r_{\varphi_i})$ beschreibt.

Analog zu den Fällen 3 und 4 im Induktionsanfang für $m = 0$ setzen wir dann $r_\varphi := (r_{\varphi_1} \mid r_{\varphi_2})$ bzw. $r_\varphi := \overline{r_{\varphi_1}}$ und erhalten dadurch einen sternfreien regulären Ausdruck, so dass φ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Um den Beweis des Satzes von McNaughton und Papert abzuschließen, müssen wir nur noch den folgenden Induktionsanfang betrachten.

Induktionsanfang: φ ist von der Form $\exists y \psi(y)$, wobei $\psi(y)$ eine $\text{FO}[\sigma'_\Sigma]$ -Formel der Quantorentiefe m mit $\text{frei}(\psi) = \{y\}$ ist.

Ziel: Konstruiere einen sternfreien regulären Ausdruck r_φ , so dass der Satz $\exists y \psi(y)$ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Um ein solches r_φ zu finden, betrachten die Menge

$$m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma] = \{\varphi_{\mathcal{A},a}^m(x) : \mathcal{A} \text{ ist eine } \sigma_\Sigma\text{-Struktur und } a \in A\}$$

aller m -Hintikka-Formeln mit *einer* freien Variablen x . Aus

Bemerkung 3.13 wissen wir, dass diese Menge *endlich* ist und nur $\text{FO}[\sigma'_\Sigma]$ -Formeln der Quantorentiefe $\leq m$ enthält.

Indem wir die freie Variable x jeweils durch das Konstantensymbol max ersetzen, können wir jede Formel $\tau \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma]$ mit einem $\text{FO}[\sigma'_\Sigma]$ -Satz identifizieren. Wegen $\text{qr}(\tau) \leq m$ gibt es gemäß Induktionsannahme einen sternfreien regulären Ausdruck $r_\tau \in \text{SFR}_\Sigma$, so dass τ (genauer: der mit τ identifizierte $\text{FO}[\sigma'_\Sigma]$ -Satz) die Sprache $L(r_\tau)$ beschreibt.

Wir zeigen im Folgenden, wie man aus den sternfreien regulären Ausdrücken r_τ (für alle $\tau \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma]$) den gesuchten Ausdruck r_φ konstruieren kann.

Dazu betrachten wir die Menge

Folie 43

$$S_\psi := \left\{ (\tau, \tau') : \begin{array}{l} \tau, \tau' \in m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma], \\ \text{es gibt } \tilde{w} \in \Sigma^+ \text{ und } \tilde{u} \in \Sigma^+, \text{ so dass für } \tilde{p} := |\tilde{w}| \\ \text{und } \tilde{q} := |\tilde{u}| \text{ gilt:} \\ (1) \mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \text{ und} \\ (2) \mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \text{ und } \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau'[\tilde{q}]. \end{array} \right\}$$

Die Menge S_ψ ist endlich, da die Menge $m\text{-Typen}_1[\sigma_\Sigma]$ endlich ist.

Aussage (1) bedeutet insbesondere, dass für $\tilde{v} := \tilde{w}\tilde{u}$ gilt: $\mathcal{A}'_{\tilde{v}} \models \exists y \psi(y)$.

Aussage (2) bedeutet, dass τ und τ' die m -Hintikka-Formeln von $(\mathcal{A}_{\tilde{w}}, |\tilde{w}|)$ und von $(\mathcal{A}_{\tilde{u}}, |\tilde{u}|)$ sind, d.h.

$$\tau = \varphi_{\mathcal{A}_{\tilde{w}}, |\tilde{w}|}^m(x) \quad \text{und} \quad \tau' = \varphi_{\mathcal{A}_{\tilde{u}}, |\tilde{u}|}^m(x). \quad (3.8)$$

Folie 44

Die Menge S_ψ wurde so gewählt, dass Folgendes gilt:

Behauptung ().* Für alle Worte $v \in \Sigma^+$ gilt: $\mathcal{A}'_v \models \exists y \psi(y) \iff$

- $\mathcal{A}'_v \models \psi[p]$, wobei die freie Variable y von ψ durch die maximale Position $p := |v|$ interpretiert wird, *oder*
- es gibt eine Position $p \in \{1, \dots, |v|-1\}$ und ein Paar $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die (nicht-leeren) Worte w und u mit $v = wu$ und $|w| = p$ gilt: $\mathcal{A}_w \models \tau[p]$ und $\mathcal{A}_u \models \tau'[q]$, wobei die freie Variable x von τ und τ' durch die maximalen Positionen $p = |w|$ von w und $q := |u|$ von u interpretiert wird.

Beweis von Behauptung ():*

„ \implies “: Man kann sich leicht davon überzeugen, dass dies direkt aus der Definition der Menge S_ψ folgt.

„ \impliedby “: Fall 1: Es gilt $\mathcal{A}'_v \models \psi[p]$ für $p := |v|$.
Dann gilt insbesondere auch $\mathcal{A}'_v \models \exists y \psi(y)$.

Fall 2: Es gibt $p \in \{1, \dots, |v|-1\}$ und $(\tau, \tau') \in S_\psi$, so dass für die Worte $w, u \in \Sigma^+$ mit $wu = v$ und $|w| = p$ gilt:

$$\mathcal{A}_w \models \tau[p] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_u \models \tau'[q] \quad (3.9)$$

für $q := |u|$.

Ziel: Zeige, dass $\mathcal{A}'_{wu} \models \exists y \psi(y)$.

Wegen (τ, τ') gibt es gemäß der Definition der Menge S_ψ Worte $\tilde{w}, \tilde{u} \in \Sigma^+$, so dass für $\tilde{p} := |\tilde{w}|$ und $\tilde{q} := |\tilde{u}|$ gilt:

$$\mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \quad (3.10)$$

und

$$\mathcal{A}_{\tilde{w}} \models \tau[\tilde{p}] \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_{\tilde{u}} \models \tau[\tilde{q}].$$

Aus (3.8) und (3.9) folgt mit Korollar 3.15, dass

$$(\mathcal{A}_{\tilde{w}}, \tilde{p}) \approx_m (\mathcal{A}_w, p) \quad \text{und} \quad (\mathcal{A}_{\tilde{u}}, \tilde{q}) \approx_m (\mathcal{A}_u, q) \quad (3.11)$$

Aus dem Kompositionslemma für die Konkatination linear geordneter Strukturen (Lemma 3.24) folgt wegen $\mathcal{A}_w \cdot \mathcal{A}_u \cong \mathcal{A}_{wu}$, dass

$$(\mathcal{A}_{\tilde{w}\tilde{u}}, \tilde{p}, |\tilde{w}\tilde{u}|) \approx_m (\mathcal{A}_{wu}, p, |wu|). \quad (3.12)$$

Hieraus folgt wegen $\text{qr}(\psi) = m$ laut Satz von Ehrenfeucht insbesondere für die FO[σ_Σ]-Formel $\hat{\psi}(y, x)$, die aus $\psi(y)$ entsteht, indem jedes Vorkommen des Konstantensymbols max durch die Variable x ersetzt wird, dass

$$\mathcal{A}_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \hat{\psi}[\tilde{p}, |\tilde{w}\tilde{u}|] \quad \iff \quad \mathcal{A}_{wu} \models \hat{\psi}[p, |wu|],$$

und somit dass

$$\mathcal{A}'_{\tilde{w}\tilde{u}} \models \psi[\tilde{p}] \iff \mathcal{A}'_{wu} \models \psi[p].$$

Wegen (3.10) gilt also $\mathcal{A}'_{wu} \models \psi[p]$, und somit auch $\mathcal{A}'_{wu} \models \exists y \psi(y)$.

□ *Behauptung (*)*

Behauptung (*) liefert, dass die vom Satz $\varphi := \exists y \psi(y)$ beschriebene Sprache $L(\varphi)$ wie folgt aussieht:

$$L(\varphi) = \{v \in \Sigma^+ : \mathcal{A}'_v \models \psi[|v|]\} \cup \bigcup_{(\tau, \tau') \in S_\psi} L(\tau, \tau'),$$

für

$$\begin{aligned} L(\tau, \tau') &:= \{wu : w, u \in \Sigma^+, \mathcal{A}_w \models \tau[|w|], \mathcal{A}_u \models \tau'[|u|]\} \\ &= L(\tau) \cdot L(\tau'), \end{aligned}$$

wobei gemäß Induktionsannahme bereits sternfreie reguläre Ausdrücke r_τ und $r_{\tau'}$ existieren, so dass τ (genauer: der mit τ identifizierte $\text{FO}[\sigma'_\Sigma]$ -Satz) die Sprache $L(r_\tau)$ und τ' die Sprache $L(r_{\tau'})$ beschreibt.

Indem wir in der Formel $\psi(y)$ jedes Vorkommen der freien Variablen y durch das Konstantensymbol max ersetzen, erhalten wir einen $\text{FO}[\sigma'_\Sigma]$ -Satz $\hat{\psi}$ der Quantortiefe m , so dass

$$\{v \in \Sigma^+ : \mathcal{A}'_v \models \psi[|v|]\} = \{v \in \Sigma^+ : \mathcal{A}'_v \models \hat{\psi}\} = L(\hat{\psi}).$$

Wegen $\text{qr}(\hat{\psi}) = m$ gibt es gemäß Induktionsannahme einen sternfreien regulären Ausdruck $r_{\hat{\psi}}$, so dass $\hat{\psi}$ die Sprache $L(r_{\hat{\psi}})$ beschreibt.

Für $s := |S_\psi|$ und $\{(\tau_1, \tau'_1), \dots, (\tau_s, \tau'_s)\} = S_\psi$ können wir also

$$r_\varphi := r_{\hat{\psi}} \mid (r_{\tau_1} \cdot r_{\tau'_1}) \mid \cdots \mid (r_{\tau_s} \cdot r_{\tau'_s})$$

wählen und erhalten damit einen sternfreien regulären Ausdruck, so dass $\varphi := \exists y \psi(y)$ die Sprache $L(r_\varphi)$ beschreibt.

Dies beendet den Beweis des Satzes von McNaughton und Papert. □

3.5 Logische Reduktionen

Graph-Zusammenhang und Erreichbarkeit sind nicht FO-definierbar

Zur Erinnerung:

Aus Satz 3.10 wissen wir, dass es keinen FO[\leq]-Satz ψ gibt, so dass für jede endliche lineare Ordnung \mathcal{B} gilt: $\mathcal{B} \models \psi \iff |B|$ ist gerade. Unter Verwendung von „logischen Reduktionen“ können wir daraus folgern, dass *Zusammenhang* von und *Erreichbarkeit* in Graphen nicht FO-definierbar sind:

Satz 3.28. *Sei E ein 2-stelliges Relationssymbol.*

(a) *Graph-Zusammenhang ist nicht FO-definierbar.*

D.h.: Es gibt keinen FO[E]-Satz φ_{Conn} , so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen $\mathcal{G} = (V^{\mathcal{G}}, E^{\mathcal{G}})$ und die zugehörige² $\{E\}$ -Struktur $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend.

(b) *Erreichbarkeit ist nicht FO-definierbar.*

D.h.: Es gibt keine FO[E]-Formel $\varphi_{Reach}(x, y)$, so dass für alle endlichen gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt: $\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in \mathcal{A} einen Weg von Knoten a zu Knoten b .

Beweis.

(a): Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nutzen Satz 3.10. Angenommen, φ_{Conn} ist ein FO[E]-Satz, so dass für jeden endlichen ungerichteten Graphen \mathcal{G} und die zugehörige $\{E\}$ -Struktur \mathcal{A} gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G} \text{ ist zusammenhängend.} \quad (3.13)$$

Idee: Nutze den Satz φ_{Conn} , um einen FO[\leq]-Satz ψ zu konstruieren, so dass für jede endliche lineare Ordnung $\mathcal{B} = (B, \leq^{\mathcal{B}})$ gilt:

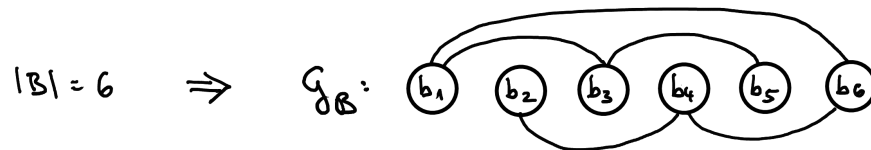
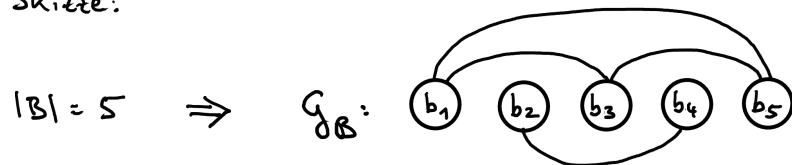
$$\mathcal{B} \models \psi \iff |B| \text{ ist gerade.}$$

Von Satz 3.10 wissen wir, dass es einen solchen Satz ψ nicht geben kann.

Um den Satz ψ zu konstruieren, ordnen wir jeder endlichen linearen Ordnung $\mathcal{B} = (B, \leq^{\mathcal{B}})$ mit $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $b_1 <^{\mathcal{B}} b_2 <^{\mathcal{B}} \dots <^{\mathcal{B}} b_n$ (für $n := |B|$) den Graphen $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}$ mit Knotenmenge B zu, dessen Kantenmenge aus genau den Kanten zwischen b_i und b_{i+2} , für alle $i \leq n-2$, und einer zusätzlichen Kante zwischen b_1 und b_n besteht.

²d.h. $A = V^{\mathcal{G}}$ und $E^{\mathcal{A}} = \{(u, v) : \{u, v\} \in E^{\mathcal{G}}\}$

Skizze:



Man sieht leicht, dass Folgendes gilt:

$$\mathcal{G}_B \text{ ist zusammenhängend} \iff |B| \text{ ist gerade.} \quad (3.14)$$

Sei nun $\xi_E(x, y)$ eine $\text{FO}[\leq]$ -Formel, die besagt:

- „ $y = x+2$ “ oder „ $x = y+2$ “ oder
- „ x ist das kleinste und y ist das größte Element bzgl. \leq “ oder
- „ x ist das größte und y ist das kleinste Element bzgl. \leq “.

Klar: Eine solche $\text{FO}[\leq]$ -Formel $\xi_E(x, y)$ lässt sich leicht formulieren (Details: Übung).

Ausgewertet in einer linearen Ordnung \mathcal{B} „simuliert“ die Formel $\xi_E(x, y)$ gewissermaßen die Kantenrelation des Graphen \mathcal{G}_B .

Sei nun ψ der $\text{FO}[\leq]$ -Satz, der aus dem $\text{FO}[E]$ -Satz φ_{Conn} entsteht, indem jedes Atom der Form $E(z_1, z_2)$ durch die $\text{FO}[\leq]$ -Formel $\xi_E(z_1, z_2)$ ersetzt wird.

Der Satz ψ ist also gerade so konstruiert, dass beim Auswerten von ψ in \mathcal{B} die Auswertung von φ_{Conn} in der zu \mathcal{G}_B gehörenden $\{E\}$ -Struktur \mathcal{A} simuliert wird. Es gilt also für jede endliche lineare Ordnung \mathcal{B} , den ungerichteten endlichen Graphen \mathcal{G}_B und die zugehörige $\{E\}$ -Struktur \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \psi &\iff \mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \\ &\stackrel{(3.13)}{\iff} \mathcal{G}_B \text{ ist zusammenhängend} \\ &\stackrel{(3.14)}{\iff} |B| \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

Aber dies ist ein Widerspruch zu Satz 3.10.

Somit muss unsere Annahme, dass der Satz φ_{Conn} existiert, falsch gewesen sein. Dies beendet den Beweis von (a).

Folie 46

(b) folgt direkt aus (a), denn:

Angenommen $\varphi_{Reach}(x, y)$ wäre eine FO[E]-Formel, so dass für alle gerichteten Graphen $\mathcal{A} = (A, E^{\mathcal{A}})$ und alle Knoten $a, b \in A$ gilt:

$\mathcal{A} \models \varphi_{Reach}[a, b] \iff$ es gibt in \mathcal{A} einen Weg von Knoten a zu Knoten b .

Dann ist

$$\varphi_{Conn} := \forall x \forall y \varphi_{Reach}(x, y)$$

ein FO[E]-Satz, der in einem gerichteten Graphen \mathcal{A} genau dann erfüllt ist, wenn \mathcal{A} stark zusammenhängend ist.

Insbesondere gilt dann für jeden ungerichteten Graphen \mathcal{G} und die zu \mathcal{G} gehörende $\{E\}$ -Struktur \mathcal{A} : $\mathcal{A} \models \varphi_{Conn} \iff \mathcal{G}$ ist zusammenhängend. Dies ist ein Widerspruch zu (a).

□

Folie 47

Logische Reduktionen

Bemerkung 3.29.

Die im Beweis von Satz 3.28 benutzte Vorgehensweise ist unter dem Begriff *logische Reduktion* bekannt.

Im Beweis von Teil (b) wurde gezeigt: Falls es eine FO[E]-Formel gibt, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist, dann gibt es auch eine FO[E]-Formel, die Graph-Zusammenhang definiert.

Somit wurde das Problem, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert, auf das Problem reduziert, eine FO[E]-Formel zu finden, die ausdrückt, dass Knoten y von Knoten x aus erreichbar ist.

Folie 48

Im Beweis von Teil (a) wurde das Problem, einen FO[\leq]-Satz zu finden, der ausdrückt, dass eine endliche lineare Ordnung eine *gerade* Kardinalität besitzt, auf das Problem reduziert, einen FO[E]-Satz zu finden, der Graph-Zusammenhang definiert.

D.h. es wurde gezeigt: Falls Graph-Zusammenhang FO-definierbar ist, so ist auch die Aussage „eine endliche lineare Ordnung besitzt eine *gerade* Kardinalität“ FO-definierbar.

Dies wurde dadurch erreicht, dass man innerhalb einer linearen Ordnung einen geeigneten Graphen „simuliert“ (bzw. „interpretiert“), indem man die Kantenrelation des Graphen durch eine FO[\leq]-Formel beschreibt.

Generell ist diese Methode der *logischen Reduktionen* oft nützlich, um bereits bekannte Nicht-Definierbarkeits-Resultate auf neue Nicht-Definierbarkeits-Resultate zu übertragen.

Wir haben diese Methode bereits in Kapitel 2 angewendet, um nachzuweisen, dass *Hamiltonkreis* nicht MSO-definierbar ist.