Vorlesung

Logik und Komplexität

Nicole Schweikardt

HU Berlin

SoSe 2015

(4V + 2Ü)

Kapitel 0: Einleitung

Logiken zur Beschreibung von Berechnungsproblemen

Beispiel 0.1 3-Färbbarkeit von Graphen

Def: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt 3-färbbar, falls seine Knoten so mit 3 Farben gefärbt werden können, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben haben.

Somit gilt:

$G = (V, E)$ ist 3-färbbar

$\Longleftrightarrow$ es gibt $R \subseteq V$, $G \subseteq V$, $B \subseteq V$, so dass $V = R \,\dot\cup\, G \,\dot\cup\, B$ und für alle $u, v \in V$ gilt: falls $(u,v) \in E$, so gilt $\neg\big((R(u) \wedge R(v)) \vee (G(u) \wedge G(v)) \vee (B(u) \wedge B(v))\big)$

$\Longleftrightarrow$ $G \models \Phi_{3\text{-COL}}$, wobei

$$\Phi_{3\text{-COL}} :=$$

$$\exists R\, \exists G\, \exists B \Big(\forall v \big((R(v) \wedge \neg G(v) \wedge \neg B(v)) \vee (\neg R(v) \wedge G(v) \wedge \neg B(v)) \vee (\neg R(v) \wedge \neg G(v) \wedge B(v)) \big) \wedge$$

$$\forall u \forall v \big(E(u,v) \rightarrow \neg \big((R(u) \wedge R(v)) \vee (G(u) \wedge G(v)) \vee (B(u) \wedge B(v)) \big) \big) \Big)$$

Dies ist eine Formel der <u>Logik zweiter Stufe</u> (SO), die eine wichtige Rolle in dieser Vorlesung spielt.

Wir werden z.B. Folgendes nachweisen:

<u>Satz von Fagin:</u>
Ein Problem gehört genau dann zur Komplexitätsklasse <u>NP</u>, wenn es durch einen Satz der <u>existentiellen Logik zweiter Stufe</u> (ESO) beschrieben werden kann.

<u>Bemerkung</u>: Unter Verwendung von Ehrenfeucht-Fraïssé-Spielen und logischen Reduktionen werden wir zeigen, dass 3-Färbbarkeit von Graphen <u>nicht</u> durch einen Satz der Logik erster Stufe (FO) beschrieben werden kann.

Beispiel 0.2 : Erreichbarkeit

Berechnungsproblem ERREICHBARKEIT:

Eingabe: ein Graph $G = (V, E)$ und zwei Knoten $s, t \in V$
Frage: Gibt es in G einen Weg von s nach t?

Antwort "ja"

$\iff$ $(G, s, t) \models \Phi_{REACH}$, wobei

$$\Phi_{REACH} := \underbrace{\Big[\mathrm{lfp}_{R,x} \big(x = s \ \vee \ \exists z \, (R(z) \wedge E(z, x)) \big) \Big]}(t)$$

"Induktive Definition" einer 1-stelligen Relation R:

- Starte mit $R := \emptyset$
- Iteriere so lange, bis sich nichts mehr ändert:
  - $R_{neu} := \{ x \in V : (G, s, t, R, x) \models (x = s \ \vee \ \exists z \, (R(z) \wedge E(z, x))) \}$
  - $R := R_{neu}$

Φ_{REACH} ist eine Formel der <u>Kleinsten Fixpunktlogik</u> (LFP). Fixpunktlogiken dienen der Charakterisierung der Komplexitätsklassen P und PSPACE.

Logiken zur Beschreibung formaler Sprachen

Wir betrachten Worte über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ und repräsentieren nicht-leere Worte $w \in \Sigma^*$ durch Strukturen über der Signatur $\sigma_\Sigma := \{\leq, P_a, P_b\}$.

Beispiel:

$w =$ aabab wird durch die Wortstruktur $\mathcal{W}_w$ mit Universum $\{1,2,3,4,5\}$ repräsentiert, wobei $\leq^{\mathcal{W}_w}$ die natürliche lineare Ordnung auf dem Universum ist und $P_a^{\mathcal{W}_w} = \{1,2,4\}$ und $P_b^{\mathcal{W}_w} = \{3,5\}$ die Mengen der Positionen von w sind, an denen der Buchstabe a bzw. der Buchstabe b steht.

Beispiel 0.3

Die durch den regulären Ausdruck $a^+ b^*$ beschriebene Sprache $L_{a^+b^*}$ wird durch die $FO[\sigma_\Sigma]$-Formel

$$\varphi_{a^+b^*} := \exists x \forall y \left(P_a(y) \leftrightarrow y \leq x \right)$$

beschrieben. D.h. es gilt für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$: $w \in L_{a^+b^*} \iff \mathcal{W}_w \models \varphi_{a^+b^*}$.

Beispiel 0.4

Die Sprache

$$L := \{\, w \in \Sigma^* : \text{die Anzahl der a's in } w \text{ ist ungerade} \,\}$$

wird durch folgende Formel Φ_L der monadischen Logik zweiter Stufe (MSO) beschrieben.

$$\Phi_L := \exists Z \Big($$

$$\forall x \Big(\big(P_a(x) \wedge \neg \exists y\, (P_a(y) \wedge y \leq x \wedge \neg y = x)\big) \rightarrow Z(x) \Big) \wedge \qquad \text{(1)}$$

$$\forall x \forall y \Big(\big(P_a(x) \wedge P_a(y) \wedge \neg \exists z\, (x \leq z \wedge z \leq y \wedge \neg z = x \wedge \neg z = y)\big) \rightarrow \big(Z(x) \leftrightarrow \neg Z(y)\big) \Big) \wedge \qquad \text{(2)}$$

$$\forall x \Big(\big(P_a(x) \wedge \neg \exists y\, (P_a(y) \wedge x \leq y \wedge \neg y = x)\big) \rightarrow Z(x) \Big) \wedge \qquad \text{(3)}$$

$$\exists x\, P_a(x) \Big) \qquad \text{(4)}$$

Teil (1) dieser Formel besagt, dass die Menge Z die erste Position enthält, die den Buchstaben a trägt.

Teil (2) der Formel besagt, dass die Menge Z "jede zweite" Position enthält, die den Buchstaben a trägt (genauer: sind x und y Positionen, an denen ein a steht und zwischen denen kein weiteres a steht, so gehört genau eine der beiden Positionen x und y zu Z).

Teil (3) der Formel besagt, dass die letzte Position, die den Buchstaben a trägt, zur Menge Z gehört.
Teil (4) gewährleistet, dass das Wort mindestens ein a enthält.

Insgesamt gilt für jedes nicht-leere Wort $w \in \Sigma^*$:

$$\mathcal{W}_w \models \Phi_L \iff w \text{ enthält eine ungerade Anzahl von a's} \iff w \in L.$$

Logiken zur Beschreibung von Datenbank-Anfragen

Beispiele dazu wurden bereits in der Veranstaltung "Logik in der Informatik" betrachtet.

Voraussetzungen zur Teilnahme an der Veranstaltung

Die Beherrschung des in der Veranstaltung "Logik in der Informatik" vermittelten Stoffs ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Veranstaltung "Logik und Komplexität".

Zur Vorbereitung wird dringend empfohlen, insbes. die Kapitel "Logik erster Stufe" und "Grundlagen des automatischen Schließens" des Skripts "Logik in der Informatik" (N. Schweikardt, HU Berlin) durchzuarbeiten.

Aufbau der Vorlesung "Logik und Komplexität"

Kapitel 0: Einleitung

Kapitel 1: Grundlagen und der Satz von Trakhtenbrot

Kapitel 2: Logik zweiter Stufe und die Sätze von Büchi und Fagin

Kapitel 3: Ehrenfeucht-Fraïssé Spiele und Lokalitätsresultate

Kapitel 4: 0-1-Gesetze

Kapitel 5: Fixpunktlogiken und der Satz von Immerman und Vardi

Organisatorisches

Webseite zur Vorlesung:

www2.informatik.hu-berlin.de/logik/lehre/SS15/LuK/index.html

Dort finden sich auch Details zum Ablauf des Übungsbetriebs und zur Zulassung zur Modulabschlussprüfung.