Übungsblatt 4

Aufgabe 14

Geben Sie für die folgenden Funktionen möglichst kleine Schaltkreise mit konstanter Tiefe über der Basis $\mathcal{B}_1$ an:

(a) $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow x_i \neq y_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(b) $f(x_1, \ldots, x_n) = 1 \Leftrightarrow x_1 + \cdots + x_n \geq 2$.

(c) $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = 1 \Leftrightarrow \sum_i x_i 2^{i-1} > \sum_i y_i 2^{i-1}$.

Aufgabe 15

Das Produkt AB von booleschen $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ ist definiert als $C = (c_{ij})$ mit

$$c_{ij} = \bigvee_{k=1,\ldots,n} (a_{ik} \wedge b_{kj}).$$

Die Disjunktion $A \vee B$ ist definiert als $D = (d_{ij})$ mit $d_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$. Die reflexiv transitive Hülle A^* von A ist definiert als $A^* = \bigvee_{i \geq 0} A^i$. Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit I.

(a) Sei $A = (a_{ij})$ eine boolesche Matrix und sei $A^* = (a^*_{ij})$ die transitive Hülle von A. Zeigen Sie, dass $A^* = (A \vee I)^{n-1}$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

Problem: TransitiveClosure
Eingabe: Eine boolesche $n \times n$-Matrix A
Ausgabe: A^*

in $\mathsf{FSize\text{-}Depth}(n^{\mathcal{O}(1)}, (\log n)^2)$ liegt.

Aufgabe 16

Für eine boolesche Funktion f bezeichne $C_k(f)$ die minimale Größe eines AC_0-Schaltkreises der Tiefe k und Parity $= (\text{Parity}^n)$ bezeichne die Paritätsfunktion. Zeigen Sie:

(a) $C_2(\text{Parity}^n) \leq 2^{n-1} + 1$.

(b) $C_3(\text{Parity}^n) \leq (\sqrt{n} + 1)2^{\sqrt{n}}$ für alle $n = r^2$ mit $r \in \mathbb{N}$.

(c) $C_k(\text{Parity}^n) = \mathcal{O}(n2^{n^{1/(k-1)}})$ für alle $n = r^{k-1}$ mit $r \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass $S_{\mathbb{B}^2}(\text{MOD}_3^n) \geq 2n - 3$ für $n \geq 3$ ist.