

Übungsblatt 3

Aufgabe 10

mündlich

Sei B eine Basis mit beschränktem Fan-In und sei $C = (V, E, \alpha, \beta, \omega)$ ein Schaltkreis über B der Größe $\Omega(n)$ mit einem Ausgabegatter. Zeigen Sie, dass $|E| = \Theta(|V|)$. Das heißt, um die Größe von C zu berechnen genügt es, $|E|$ zu ermitteln. Was kann über den Fall einer Basis mit unbeschränktem Fan-In gesagt werden? Was kann über den Fall mehrerer Ausgabegatter gesagt werden?

Aufgabe 11

mündlich

Für eine Menge $A \subseteq \{0, 1\}^*$ sei $[A]_{\equiv_{cd}} = \{B \subseteq \{0, 1\}^* \mid B \equiv_{cd} A\}$. Sei $\mathbf{D} = \{[A]_{\equiv_{cd}} \mid A \subseteq \{0, 1\}^*\}$ die Menge der **cd-Grade**. Für $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \in \mathbf{D}$ definiere $\mathbf{d}_1 \leq \mathbf{d}_2$, falls $A_1 \in \mathbf{d}_1$ und $A_2 \in \mathbf{d}_2$ existieren mit $A_1 \leq_{cd} A_2$. Zeigen Sie:

- \leq ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf \mathbf{D} , in der jedes Paar von Elementen eine kleinste obere Schranke besitzt (d.h. (\mathbf{D}, \leq) ist ein *oberer Halbverband*).
- Die kleinste obere Schranke von $[A]_{\equiv_{cd}}$ und $[B]_{\equiv_{cd}}$ ist die Menge $[A \oplus B]_{\equiv_{cd}}$, wobei $A \oplus B$ die markierte Vereinigung $A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}$ ist.

Aufgabe 12

mündlich

Betrachten Sie folgende Funktion DIV:

Eingabe: zwei Binärzahlen a und b der Länge n
Ausgabe: die Binärzahl mit dem Wert $\lceil \frac{a}{b} \rceil$

Zeigen Sie $\text{DIV} \in \text{TC}^0$.

Hinweis: Reduzieren Sie DIV auf die Berechnung von polynomiell vielen Bits der Binärdarstellung von $1/b$ und benutzen Sie die Gleichheit $1/z = \sum_{i \geq 0} (1-z)^i$, um die Berechnung von $1/z$ für $1/2 \leq z \leq 1$ auf ITMULT zu reduzieren.

Aufgabe 13

10 Punkte

Betrachten Sie die Funktion MOD_m mit

$$\text{MOD}_m(a_{n-1} \cdots a_0) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=0}^{n-1} a_i \equiv_m 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für $m > 1$ gilt: $\text{MOD}_m \leq_{cd} \text{MAJ}$.