Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

WS 2004/05
18. Januar 2004

Theoretische Informatik II

12. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 24., 25. und 27. Januar
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 31.1., 1.2. und 3.2.

Aufgabe 59 [*mündlich*]

Eine k-NTM M heißt *linear platzbeschränkt*, falls eine Konstante c existiert, so dass M bei Eingabe x höchstens $c|x|$ verschiedene Bandfelder besucht. Zeigen Sie folgende Charakterisierungen:

$$\begin{aligned}\mathrm{DCSL} &= \{L(M) \mid M \text{ ist eine linear platzbeschränkte } k\text{-DTM}\},\\ \mathrm{CSL} &= \{L(M) \mid M \text{ ist eine linear platzbeschränkte } k\text{-NTM}\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 60 [*mündlich*]

Sei Σ ein durch $<$ geordnetes Alphabet. Die lexikographische Ordnung auf Σ^* ist dann durch

$$\begin{aligned} x \le y :\Leftrightarrow\ & x = y \text{ oder } |x| < |y| \text{ oder}\\ & |x| = |y| \text{ und für ein } i \le |x| \text{ ist } x_1 \cdots x_{i-1} = y_1 \cdots y_{i-1} \text{ und } x_i < y_i \end{aligned}$$

definiert. Eine Funktion $f : \Gamma^* \to \Sigma^*$ heißt *monoton*, falls $f(x) \le f(y)$ für alle Wörter $x \le y$ gilt. Eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ heißt *in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar*, falls A leer ist oder eine monotone Turing-berechenbare Funktion f mit Wertemenge $W(f) = A$ existiert. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. A ist entscheidbar,
2. A wird von einer k-NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
3. A wird von einer 1-NTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
4. A ist in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar,
5. A wird von einer k-DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält,
6. A wird von einer 1-DTM akzeptiert, die bei allen Eingaben hält.

Aufgabe 61 [*mündlich*]

Zeigen Sie: Jede unendliche rekursiv aufzählbare Sprache besitzt eine unendliche entscheidbare Teilmenge. (Hinweis: Konstruieren Sie eine Teilmenge, die in lexikographischer Ordnung rekursiv aufzählbar ist.)

Aufgabe 62 [*mündlich*]

Beweisen sie die folgende Variante des Satzes von Rice: Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und RE_Σ bezeichne die Klasse aller rekursiv aufzählbaren Sprachen über Σ. Dann ist für jede Sprachklasse $\mathcal{S}$ mit $\emptyset \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathrm{RE}_\Sigma$ die Sprache

$$K(\mathcal{S}) := \{ w \in \{0,1\}^* \mid L(M_w) \in \mathcal{S} \}$$

unentscheidbar.

Aufgabe 63 [*10 Punkte*]

Welche der folgenden Sprachen sind entscheidbar? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

1. $\{w \mid L(M_w)$ ist endlich $\}$
2. $\{w \mid L(M_w)$ ist unendlich $\}$
3. $\{w \mid \exists w' \neq w : L(M_w) = L(M_{w'})\}$
4. $\{w \mid L(M_w)$ ist rekursiv aufzählbar $\}$
5. $\{w \mid \overline{L(M_w)}$ ist rekursiv aufzählbar $\}$