Institut für Informatik
Komplexität und Kryptografie
Prof. Dr. Johannes Köbler

WS 2004/05
11. Januar 2004

Theoretische Informatik II

11. Übung

Besprechung der mündlichen Aufgaben am 17., 18. und 20. Januar
Abgabe der schriftlichen Lösungen am 24., 25. und 27. Januar

Aufgabe 52 [*mündlich*]

Zeigen Sie folgende Inklusionen:

$$\mathrm{REG} \subsetneq \mathrm{DCFL} \subsetneq \mathrm{CFL} \subsetneq \mathrm{DCSL} \subseteq \mathrm{CSL} \subsetneq \mathrm{REC} \subsetneq \mathrm{RE}.$$

Bemerkung: Die Frage, ob DCSL echt in CSL enthalten ist, ist bis heute ungelöst.

Aufgabe 53 [*mündlich*]

Sei L_i eine beliebige Typ-i Sprache. Zeigen oder widerlegen Sie für $i = 0, 1, 2, 3$:

1. L_i^R ist eine Typ-i Sprache,
2. L_i^+ ist eine Typ-i Sprache,
3. L_i^* ist eine Typ-i Sprache,
4. L_i^3 ist eine Typ-i Sprache.

Aufgabe 54 [*mündlich*]

Zeigen Sie, dass eine Sprache $A \subseteq \Sigma^*$ genau dann rekursiv aufzählbar ist, wenn es eine Turing-berechenbare partielle Funktion $f : \Sigma^* \to \Sigma^* \cup \{\uparrow\}$ gibt, so dass A der Definitionsbereich von f ist.

Aufgabe 55 [*mündlich*]

Die Goldbachsche Vermutung lautet: Jede gerade Zahl grösser 3 ist die Summe zweier Primzahlen. Es ist unbekannt, ob diese Vermutung gilt.

1. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ rekursiv ist:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls die Goldbachvermutung stimmt} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2. Beschreiben Sie informell eine DTM, die bei einer beliebigen Eingabe $x \in \{0,1\}^*$ genau dann eine 0 ausgibt, wenn die Goldbachvermutung falsch ist.

Aufgabe 56 [*mündlich*]

Zeigen Sie:

1. Die Reduktionsrelation $\leq$ ist reflexiv und transitiv.
2. Jede Sprache $A \in \text{REC}$ lässt sich auf die Sprache $B = \{1\}$ reduzieren.
3. Jede Sprache $A \in \text{RE}$ lässt sich auf das Halteproblem H reduzieren.

Aufgabe 57 [*4 Punkte*]

Sei A eine beliebige rekursiv aufzählbare und B eine beliebige rekursive Sprache.

1. Ist $A \setminus B$ rekursiv?
2. Ist $B \setminus A$ rekursiv?
3. Ist $A \setminus B$ rekursiv aufzählbar?
4. Ist $B \setminus A$ rekursiv aufzählbar?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 58 [*6 Punkte*]

Für zwei Sprachen A und B sei die *markierte Vereinigung* $A \oplus B$ definiert durch

$$A \oplus B = \{0x \mid x \in A\} \cup \{1x \mid x \in B\}.$$

Zeigen Sie:

1. $A \leq A \oplus B$ und $B \leq A \oplus B$.
2. $A \oplus B$ ist genau dann rekursiv, wenn A und B rekursiv sind.
3. $A \oplus B$ ist genau dann rekursiv aufzählbar, wenn A und B rekursiv aufzählbar sind.
4. Für alle Sprachen C gilt: $A \oplus B \leq C$ genau dann, wenn $A \leq C$ und $B \leq C$.