Übungen zur Komplexitätstheorie Sommersemester 2003

Olaf Beyersdorff / Lorenz Weizsäcker

Übungsblatt 2

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Menge der Palindrome $L = \{x \in \Sigma^* \mid x = x^R\}$, wobei x^R das Wort ist, bei dem die Symbole von x in umgekehrter Reihenfolge aufgeschrieben sind. Beschreiben Sie sowohl eine 1-TM als auch eine 2-TM, die L entscheidet.

Aufgabe 5 (schriftlich, 10 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ echte Komplexitätsfunktionen.

a) Zeigen Sie, dass $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ und 2^g echte Komplexitätsfunktionen sind.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Funktion echte Komplexitätsfunktionen sind:
i) n^2, ii) $\log n^2$, iii) $n \log n$, iv) $n^8 + 6n$ v) 2^{n^2}.

Aufgabe 6

Zeigen Sie: Jede Sprache, die von einer k-NTM in $f(n)$ vielen Schritten entschieden wird, kann auch von einer 2-NTM in $\mathcal{O}(f(n))$ vielen Schritten entschieden werden.

Aufgabe 7

Sei $\mu = M_0, M_1, \ldots$ eine Aufzählung aller Turingmaschinen, die über dem Alphabet $\{0,1\}$ kodiert seien. Für jedes Wort $x \in \{0,1\}^*$ bezeichne

$$K_\mu(x) = \min\{|M_j| \mid M_j(\epsilon) = x\}$$

die **Kolmogorov-Komplexität** von x bezüglich μ. Hierbei bezeichne ϵ das leere Wort, d.h. $K_\mu(x)$ ist die Länge der kleinsten (Kodierung einer) Turingmaschine, die *ohne* Eingabe das Wort x ausgibt. Zeigen Sie:

a) Es gibt eine Aufzählung μ_0, so dass es für alle Aufzählungen μ eine Konstante c gibt, so dass für alle Wörter $x \in \{0,1\}^*$ gilt:

$$K_{\mu_0}(x) \leq K_\mu(x) + c.$$

Hinweis: Benutzen Sie eine universelle TM.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben definieren wir $K(x) = K_{\mu_0}(x)$.

b) Es gibt eine Konstante c, so dass für alle Wörter $x \in \{0,1\}^*$ gilt: $K(x) \leq |x| + c$.

c) Für alle $n \geq 1$ gibt es ein Wort x der Länge n mit $K(x) \geq n$.