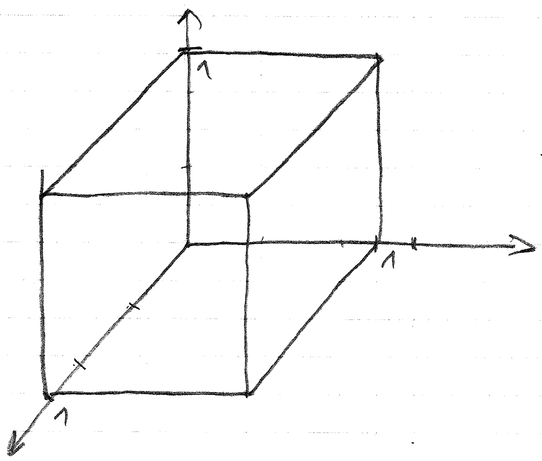
Vorl. 13–14

Folklore:

<u>Komplexität der Simplexmethode</u>

Betr. wir den Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$



Die Ecken sind alle mgl n-Tupel
$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \{0,1\}$.
Damit hat der Einheitswürfel in $\mathbb{R}^n$ 2^n Ecken.

Offensichtlich:

- wenn alle Ecken durchlaufen werden müssen, so ist die SM exponentiell (und damit <u>nicht</u> polynomial) in Abhängigkeit der Problemdimension abzuschätzen.
- 1972 veröffentlichen Klee & Minty eine Arbeit, in der sie nachweisen, daß im <u>worse case</u> die SM nicht polynomial in Abhgkt der ~~d~~ Dim. ist.

ZF: $\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \longrightarrow \max$

$$\begin{cases} 2 \cdot \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1} & i=1,\dots,n \\ x_1,\dots,x_n \geq 0 \end{cases}$$

Die SM braucht hier 2^{n-1} Iterationen im worst case.

(ZF: $10^{n-1} \cdot x_1 + 10^{n-2} x_2 + \dots + 10 \cdot x_{n-1} + x_n \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \leq 1 \\ 2(10 \cdot x_1) + x_2 \leq 100^1 \\ 2(10^2 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2) + x_3 \leq 100^2 \\ \vdots \\ 2(10^{n-1} x_1 + 10^{n-2} x_2 + \dots + 10 x_{n-1}) + x_n \leq 100^{n-1} \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$

)

Das lineare Optimierungsproblem als Ungleichungssystem

Man kann jedes LOP in der Form eines Ungleichungssystems umschreiben. Dazu faßt man das primale und das duale Problem zusammen:

(P) $\max \{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}$
(D) $\min \{ \langle b, y \rangle \mid A^T y \geq c, y \geq 0 \}$.

Es sei x bzw. y ein zul. Pkt für (P) bzw. (D).

Dann gilt: $c^T x \leq b^T y$

$$\Leftrightarrow -c^T x + b^T y \geq 0$$

Folglich gilt:

(P) ist gd lösbar, wenn das folgende Ungleichungssystem eine Lösung $(\bar{x}, \bar{y})$ hat und jede solche Lsg $(\bar{x}, \bar{y})$ liefert Opt. Lösung $\bar{x}$ für (P) und $\bar{y}$ für (D):

$$\begin{cases} -c^T x + b^T y \leq 0 \\ Ax \leq b \\ -x \leq 0 \\ -A^T y \leq -c \\ -y \leq 0 \end{cases}$$

denn das ist genau dann, wenn $c^T x = b^T y$

Хачиян, Л.Я

Das Ellipsoidenverfahren von L.G. Khachiyan (1979)

(auf 3 Seiten)

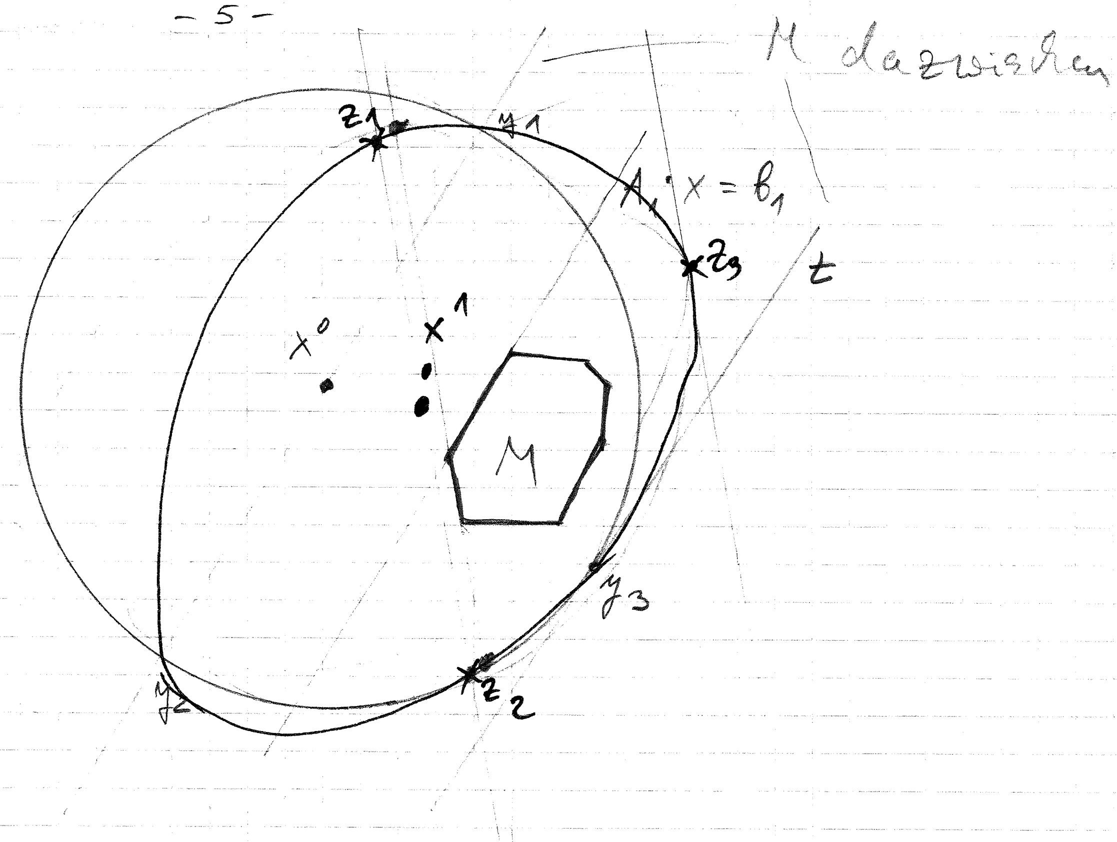
(Полиномиальный алгоритм в линейном программировании, ДАН СССР 1979, т. 244, с. 1093-1096)

Idee des Ellipsoidenverfahrens (EV):
Mit dem EV versucht man eine Lösung eines linearen Ungleichungssystems der Form $Ax \leq b$ zu finden mit Hilfe einer bestimmten Folge von Ellipsoiden E^i, $i=0,1,\ldots$ deren Volumen sich in jedem Schritt mit einem festen Faktor (der nur von der Dim. abhg ist) verkleinert.

Spezialfall: $n=2 \leadsto \mathbb{R}^2$

Sei $M := \{x \mid x \in \mathbb{R}^2 \wedge Ax \leq b, x \geq 0\}$.

Sei $M \subseteq K$ - Kreis mit Radius r und Mittelpkt $x^0 = 0$. Falls $x^0 \notin M$, dann ist (mindestens) eine der Ungleichungen (Bed.) von M verletzt, etwa $A_1 \cdot x^0 > b_1$. Seien y_1 und y_2 die Schnittpunkte zw. den zu $A_1 \cdot x^0 = b_1$ parallelen Gerade, die durch x^0 verläuft und K; y_3 sei der Berührungspkt der Tangente t zu K, die parallel zu $A_1 \cdot x^0 = b_1$ ist und M zwischen t und der Ger. $(y_1 - y_2)$ liegt.



Betr. wir dann die Ellipsoidenfamilie $\mathcal{E}$ mit $E \in \mathcal{E}$ und $y_1, y_2, y_3 \in E$ und die Tangente t berührt E im Pkt y_3. $\mathcal{E}$ wird in diesem Fall durch 1 Parameter beschrieben. Sei dann E^* das Ellipsoid aus $\mathcal{E}$, das ein minimales Volumen besitzt. Sei sein Mittelpkt x^1. Für x^1 wiederholen wir die Überlegungen, wie für x^0.

Jetzt zeigen wir einige Eigenschaften von Ellipsoiden, die wir für das Karmarkar Verfahren brauchen:

Dafür erinnern wir uns an einige Grundbegriffe aus der Algebra.

Def. 1: Eine Matrix A heißt symm. $\overset{=}{\text{Df}}$

$\forall x \forall y (x \in VR \wedge y \in VR \rightarrow \langle A \cdot x, y \rangle = \langle x, Ay \rangle)$.

Bem. 1 A symm gdw $A = A^T$

Beweis: ($\leftrightarrow$) Sei A symm.

$\underset{n.\,Df.}{\leftrightarrow}$ $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$

$\leftrightarrow$ $(Ax)^T \cdot y = x^T A y$

$\leftrightarrow$ $x^T A^T y = x^T A y$

$\leftrightarrow$ $A^T = A$.

Def. 2: A heißt pos. definit $\overset{=}{\text{Df}}$

$\forall x (x \in VR \wedge x \neq \Theta \rightarrow \langle Ax, x \rangle > 0)$.

Bem 2: Wenn A - pos. def., so A - reg.

Beweis: Ann. - nein $\rightarrow$ Spalten von A lin. abh.

$\leftrightarrow \exists (\lambda_i) \neq \Theta_n$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i A_{\cdot i} = \Theta_n$

$\leftrightarrow$ $A \cdot \lambda = \Theta_n$

$\underset{\text{Ann}}{\rightarrow}$ $\langle A \cdot \lambda, \lambda \rangle = 0$ ↯ zur Def. v. pos. Def.

Def. 3: Sei B eine symm. pos.-def. $n \times n$ Matrix. und es sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Die Menge E: $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-\bar{x})^T B^{-1} (x-\bar{x}) \leq 1\}$ heißt Ellipsoid und die Matrix B ist die erzeugende Matrix.

Def. 4: Eine Abb. $\phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt affin, wenn gilt:

$$\forall x (x \in \mathbb{R}^n \to \Phi(x) = Ax + b \text{ u. } A\text{-reg.})$$

Def. 5: Vol E aus der Analysis
$$\overset{\shortparallel}{\lambda}(E) := \mu_n \cdot \sqrt{\det B}, \text{ wobei}$$
μ_n = Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist

Lemma 1: Seien E_1, E_2 Ellipsoide, Φ eine affine Abb. Dann gilt:

(a) $\Phi(E)$ ist Ellipsoid

(b) $$\frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_2)} = \frac{\lambda(\Phi(E_1))}{\lambda(\Phi(E_2))}$$

Beweis: zu (a)

Betr. $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-\bar{x})^T B^{-1} (x-\bar{x}) \leq 1\}$

B - pos. def., symm

$\Phi(x) := Ax + B$, A-reg.

Sei $y := \Phi(x) \Rightarrow x = A^{-1}(y-b)$ wobei

A^{-1} ex. da A-reg.

z.z.: $E = \{x \mid \dots\} \xrightarrow{\Phi} \underbrace{\{\dots\}}_{\text{auch Ellipsoid}}$

$$\Phi(E) = \{\underline{\Phi(x) \in \mathbb{R}^n} \mid (\Phi(x) - \Phi(\bar{x}))^T \cdot R^{-1}(\Phi(x) - \Phi(\bar{x})) \leq 1\}$$

$\uparrow$ noch gesucht

mit R - symm, pos. def.

<u>dazu</u> Haben:

$$(x - \bar{x})^T \, B^{-1} \, (x - \bar{x}) \leq 1 \quad \text{u.}$$

$$\Big\updownarrow \quad x = A^{-1}(y - b) \quad \text{u.} \quad y = \Phi(x)$$

$$(A^{-1}(y - b) - A^{-1}(\bar{y} - b))^T \, B^{-1}(A^{-1}(y - b) - A^{-1}(\bar{y} - b)) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(A^{-1}y - A^{-1}\bar{y})^T \, B^{-1}(A^{-1}y - A^{-1}\bar{y}) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(A^{-1}(y - \bar{y}))^T \, B^{-1} \, (A^{-1}(y - \bar{y})) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(y - \bar{y})^T \cdot \underbrace{(A^{-1})^T}_{= (A^T)^{-1}} \, B^{-1} \, A^{-1} \, (y - \bar{y}) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(y - \bar{y})^T \cdot (\underbrace{A\,B\,A^T}_{:= R})^{-1} \, (y - \bar{y}) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(y - \bar{y})^T \, R^{-1} \, (y - \bar{y}) \leq 1.$$

<u>z.z.:</u> R-symm u. pos. def.

(1) R-symm $\Leftrightarrow$ $R = R^T$

$$R^T = (ABA^T)^T = (A^T)^T B^T A^T = AB^T A^T \underset{B\text{-symm}}{=} ABA^T = R.$$

(2) R-pos. def. $\underset{n.\,Vg.}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \left((x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_n) \rightarrow \langle Rx, x \rangle > 0 \right)$

Sei $x \neq 0_n$. $\Rightarrow$ $\langle Rx, x \rangle = \langle ABA^T x, x \rangle =$

$$= ((ABA^T)x)^T x = x^T (A^T)^T B^T A^T x = (\underbrace{A^T x}_{:= z})^T B^T \underbrace{A^T x}_{= z}$$

$$= z^T \cdot B^T \cdot z = (Bz)^T \cdot z = \langle Bz, z \rangle > 0,$$

da B-pos. def., falls $z \neq 0_n$.

$z \neq 0_n \Leftrightarrow x \neq 0_n$
$\parallel$
$A^T x \neq 0_n$. Da A-reg., gilt $A^T x = 0_n \Leftrightarrow x = 0_n$. ∎

zu (6) $\quad vol(E) = \lambda(E) = \mu_n \cdot \sqrt{|B|}$

Haben: $\quad \dfrac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_2)} = \dfrac{\sqrt{|B_1|}}{\sqrt{|B_2|}}$ und

$$\frac{\lambda(\Phi(E_1))}{\lambda(\Phi(E_2))} = \frac{\sqrt{|R_1|}}{\sqrt{|R_2|}} = \frac{\sqrt{|AB_1A^T|}}{\sqrt{|AB_2A^T|}} = \frac{\cancel{\sqrt{|A|}} \cdot \sqrt{|B_1|} \cdot \cancel{\sqrt{|A^T|}}}{\cancel{\sqrt{|A|}} \cdot \sqrt{|B_2|} \cdot \cancel{\sqrt{|A^T|}}} = \frac{\sqrt{|B_1|}}{\sqrt{|B_2|}}$$ ∎

Lemma 2: Für jedes $y > -1$ gilt:

$y \geq \ln(y+1)$.

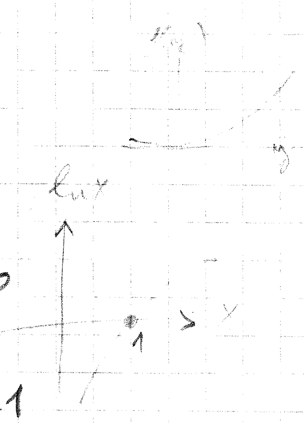
Beweis: Betr. $f(y) := y - \ln(y+1)$.

$\hookrightarrow f'(y) = 1 - \frac{1}{y+1}$

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{y+1} \Leftrightarrow y+1 = 1 \Leftrightarrow y = 0$

$f''(y) = +1 \cdot \frac{1}{(y-1)^{+2}} > 0$

$\hookrightarrow$ in $y = 0 \Rightarrow$ lok. Minimum



$\hookrightarrow f(y) \geq f(0) = 0 - \ln(1) = 0 - 0 = 0$

d.h. $y - \ln(y+1) \geq 0$ für $y > -1$ □

Lemma 3:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < \exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{\sqrt[2(n+1)]{e}}$$

für $n \geq 2$.

Beweis: Aus $y \geq \ln(y+1)$ für $y > -1$ $\Rightarrow$

$\forall k > 0 \quad k \cdot y \geq k \cdot \ln(y+1)$

$\Leftrightarrow k \cdot y \geq \ln(y+1)^k$

$\Leftrightarrow e^{k \cdot y} \geq (y+1)^k$

$\Leftrightarrow \exp(k \cdot y) \geq (y+1)^k \qquad (1)$

Betr. gilt:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} =$$

$$= \left(1+\left(-\frac{1}{n+1}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = (2)$$

Es gilt:

$$\Big(1+\underbrace{\left(-\frac{1}{n+1}\right)}_{:=y>-1}\Big) \underset{(1)}{\leq} e^{1\cdot y} = e^{-\frac{1}{n+1}} \qquad (3)$$

und

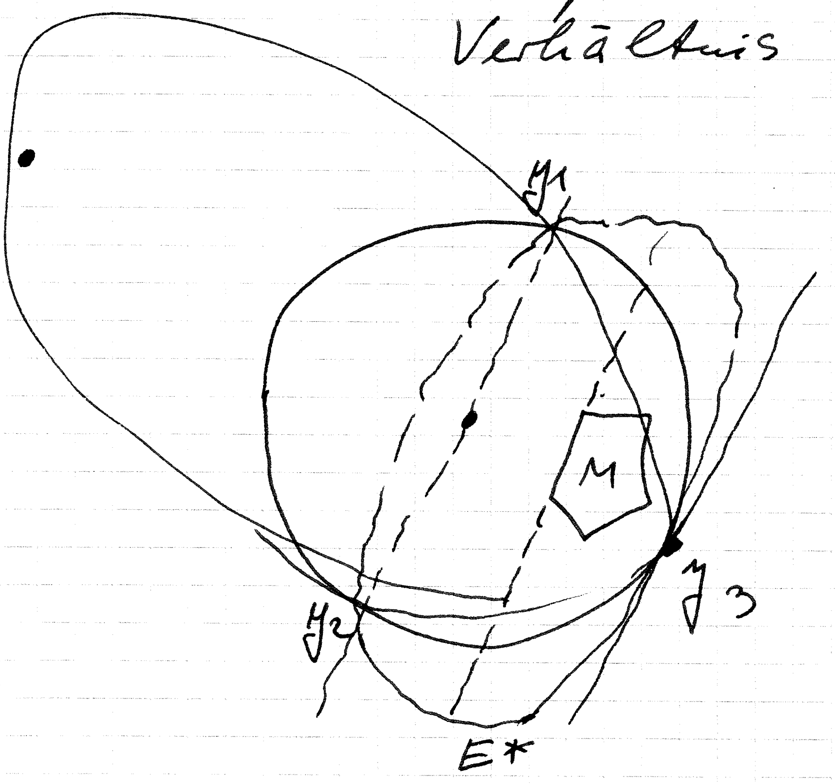
$$\Big(1+\underbrace{\frac{1}{n^2-1}}_{=:y}\Big)^{\underbrace{\frac{n-1}{2}}_{=:k}} \underset{(1)}{\leq} e^{k\cdot y} = e^{\frac{n-1}{2}\cdot\frac{1}{n^2-1}} = e^{\frac{1}{2(n+1)}} \qquad (4)$$

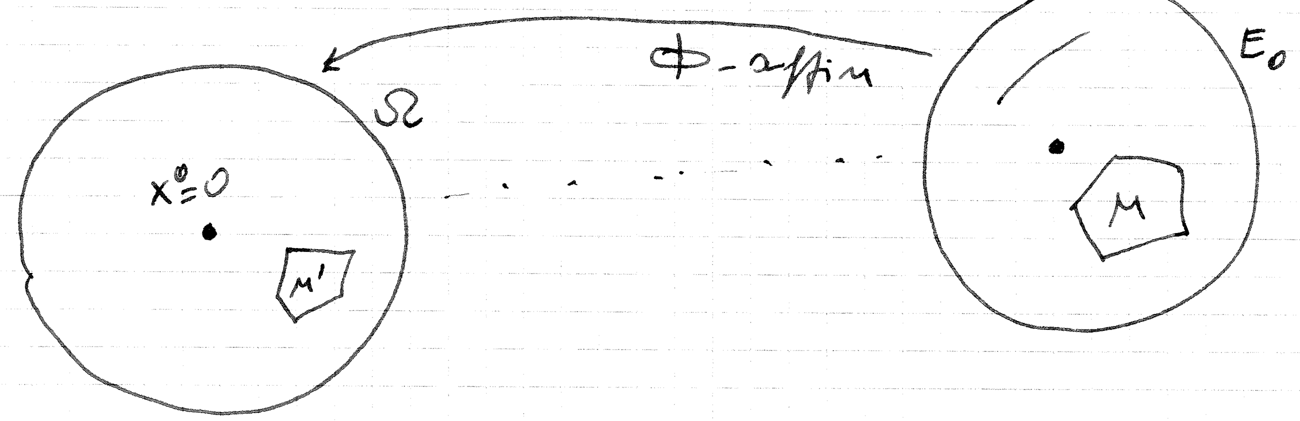
$$\hookrightarrow (2) \leq e^{-\frac{1}{n+1}}\cdot e^{\frac{1}{2(n+1)}} = e^{-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2(n+1)}} = \exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right) \quad \blacksquare$$

Erinnern:

- LOP ⇝ Ungleichungssystem (Dualität)
- Lemma 1: Die affine Abb. eines Ellipsoids ist wieder ein Ellipsoid und das Verhältniss der Volumina ~~zweier~~ der affinen Bilder zweier Ellipsoiden ist gleich dem Verhältnis der Ellipsoiden.





$\Phi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – affin ⇝

d.h. $y = \Phi(x) = Ax + b$, A-reg.

⇝ $\Phi^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit

$\Phi^{-1}(y) = x = A^{-1}(y-b) = A^{-1}y - A^{-1}b$.

⇝ A^{-1}-reg, "b^{-1}" $:= -A^{-1}b$

Satz 1: Sei $\mathcal{E} := \{ E \mid$

(E1) $E \subseteq \mathbb{R}^n$ - Ellipsoid

(E2) $(-1, 0, 0, \ldots, 0)^T \in \partial E$ Rand des Ellipsoiden

(E3) die Tangentialhyperebene in $(-1, 0, \ldots, 0)^T$ an E ist $\{ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 = -1 \}$

(E4) $\partial E \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = \{ (0, \xi_2, \ldots, \xi_n)^T \mid \sum_{i=2}^{n} \xi_i^2 = 1 \}) \}$.

Dann gilt für die Ellipsoidenfamilie:

(a) $\mathcal{E}$ ist eine 1-par. Familie von Ellipsoiden

(b) Es gibt genau ein $\tilde{E} \in \mathcal{E}$ mit min. Vol.

(c) $\tilde{E}$ wird bestimmt durch

$\bar{x} = \left(-\frac{1}{n+1}, 0, \ldots, 0\right)^T$, $B = \mathrm{Diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ mit

$\beta_1 = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$, $\beta_i = \frac{n^2}{n^2-1}$ für $i \geq 2$

(d) $\mathrm{Vol}(\tilde{E}) = \lambda(\tilde{E}) = \mu_n \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

__Beweis:__ Sei $E \in \mathcal{E}$, $E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x-\bar{x})^T \cdot B^{-1} \cdot (x-\bar{x}) \leq 1\}$

__zu bestimmen__ sind $\bar{x}$ und B!

Sei $A = B^{-1} \leadsto$ A-symm. u. pos.-def.

Dann ist ein Pkt $x \in \partial E$ gdw

$$x^T A x - 2x^T A\bar{x} + \bar{x}^T A \bar{x} = 1 \qquad (1)$$

Aus (1) folgt in der (x_1,x_2)-Ebene:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - 2x_1 \sum_{i=1}^{n} a_{1i}\bar{x}_i - 2x_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\bar{x}_i +$$

$$+ \underset{1\times n}{\bar{x}^T} \cdot \underset{n\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{\bar{x}} = 1.$$

Aus (E4) folgt dann (für die im (x_1,x_2)-Ebene):

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und damit:

$$a_{22} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\bar{x}_i + \bar{x}^T \cdot A \cdot \bar{x} = 1 \quad \text{und}$$

$$a_{22} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{2i}\bar{x}_i + \bar{x}^T A \bar{x} = 1.$$

Aus den letzten zwei Gleichungen folgt dann:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{2i}\bar{x}_i = 0 \qquad (2)$$

Analog für die (x_1,x_j)-Ebene $(j \geq 2)$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\bar{x}_i = 0 \qquad (2')$$

Sei $e_k = (0,\dots,0,\underset{\uparrow\ k\text{-te Stelle}}{1},0,\dots,0)^T$ der k-te Einheitsvektor.

Aus (E3) u. (E2) folgt dann:

$$\langle e_k, \underbrace{A\cdot(x-\underset{\text{Berührungspkt}}{\bar{x}})}_{\substack{\text{Pkt} \in \partial G \\ \in \text{Tangente}}} \rangle = 0 \qquad k=2,3,\dots,n$$

(nach Def. v. Tang-hyperebene)

$$\Longleftrightarrow \underbrace{e_k^T \cdot A}_{A_{\cdot k}^T} \cdot \begin{pmatrix} -1-\bar{x}_1 \\ -\bar{x}_2 \\ \vdots \\ -\bar{x}_n \end{pmatrix} = 0 \qquad k=2,\dots,n.$$

$e_k^T \cdot A = A_{\cdot k}^T$

und damit erhalten wir

$$-a_{k1} - \sum_{i=1}^{n} a_{ki}\bar{x}_i = 0 \qquad k=2,\dots,n \qquad (3)$$

Jetzt setzen wir (2') in (3) und erhalten:

$a_{k1} = 0$ für $k=2,\dots,n$ und folglich

auch $a_{1k} = 0$ (A-Symm.), d.h.

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}\right) \qquad (4)$$

Da A - reg. ist, folgt dann, daß auch

$$\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ reg. ist.}$$

Das Einsetzen von (4) in (3) ergibt:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \vartheta_{n-1}$$

Das gilt gdw

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{reg.}} \begin{pmatrix} \overline{x}_2 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix} = \vartheta_{n-1} \iff \begin{matrix} \overline{x}_2 = 0 \\ \vdots \\ \overline{x}_n = 0 \end{matrix} \quad .$$

Nur $\overline{x}$ läßt sich nicht eindeutig bestimmen.
$\overline{x}_1$ ist der gesuchte Parameter.

Aus (1) folgt jetzt wegen $\overline{x}_2 = \cdots = \overline{x}_n = 0$, daß

$$x \in \partial E \iff x^T \cdot A\, x - 2 x_1 \overline{x}_1 a_{11} + a_{11} \overline{x}_1^{\,2} = 1 \qquad (5)$$

Aus (E4) folgt dann: Pkte "e_k" $\in \partial E$ für $k = 2, \ldots, n$

und damit (aus (5)) $\quad a_{ii} = 1 - a_{11} \overline{x}_1^{\,2} \quad i = 2, \ldots, n \qquad (6)$

Ebenfalls aus (E4) folgt:

$$\left(\frac{e_k}{\sqrt{2}} - \frac{e_l}{\sqrt{2}}\right) \in \partial E \quad \text{für } k, l \geq 2,\ k \neq l.$$

Dann folgt (analog) aus (5)

$$\left(\frac{e_k}{\sqrt{2}} - \frac{e_l}{\sqrt{2}}\right)^T A \left(\frac{e_k - e_l}{\sqrt{2}}\right) + a_{11}\bar{x}_1^2 = 1$$

und damit auch

$$\frac{1}{2}\left(a_{kk} - \underset{\text{Symm}}{\underline{2a_{kl}}} + a_{ll}\right) = 1 - a_{11}\cdot\bar{x}_1^2 \qquad (7)$$

$$\text{für } k, l \geq 2,\ k \neq l$$

Aus (6) u. (7) folgt:

$$\underbrace{\frac{1}{2}a_{kk} + \frac{1}{2}\cdot a_{ll}}_{\overset{(6)}{=}\ 1 - a_{11}\cdot\bar{x}_1^2} - \left(1 - a_{11}\cdot\bar{x}_1^2\right) = a_{kl} \qquad \begin{matrix} k, l \geq 2 \\ k \neq l \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{kl} = 0, \quad k, l \geq 2, \quad k \neq l.$$

d.h. wir haben: $\boxed{\begin{matrix} a_{kl} = 0 \quad k, l \geq 2,\ k \neq l \\ a_{ii} = 1 - a_{11}\bar{x}_1^2,\ i \geq 2 \end{matrix}}$

$$\hookrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & 1 - a_{11}\bar{x}_1^2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 - a_{11}\bar{x}_1^2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = ?$ Berechnen aus (E2) u. (5).

$$\hookrightarrow a_{11} + 2 \cdot \bar{x}_1 a_{11} + a_{11} \bar{x}_1^2 = 1 \Leftrightarrow a_{11}(1 + 2\bar{x}_1 + \bar{x}_1^2) = 1$$

$$\Leftrightarrow a_{11} = \frac{1}{(1+\bar{x}_1)^2} \Leftrightarrow a_{ii} = 1 - \frac{\bar{x}_1^2}{(1+\bar{x}_1)^2} = \underline{\underline{\frac{2\bar{x}_1 + 1}{(1+\bar{x}_1)^2}}}$$

d.h. $E \in \mathcal{E}$ wird durch ein Par. $\bar{x}_1 = \xi$ bestimmt und es gilt:

Mittelpunkt $\bar{x} = (\overset{\bar{x}_1}{\overset{\shortparallel}{\xi}}, 0, \dots, 0)^T$.

Erz. Matrix $B = A^{-1} = \operatorname{Diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$

mit $\beta_1 = \frac{1}{a_{11}} = (1+\xi)^2$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\xi)^2 & & & \\ & \frac{(1+\xi)^2}{2\xi+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{(1+\xi)^2}{2\xi+1} \end{pmatrix}$$

$$\beta_i = \frac{(1+\xi)^2}{2\xi+1}, \quad i = 2, \dots, n.$$

$\rightsquigarrow$ (a)-bew.

zu (6) Es gilt: $\operatorname{Vol.}(E(\xi)) = \mu_n \sqrt{|B|} =$

$$= \mu_n \sqrt{(1+\xi)^2 \cdot \left(\frac{(1+\xi)^2}{2\xi+1} \right)^{n-1}}$$

$$= \mu_n \cdot \sqrt{\frac{(1+\xi)^{2n}}{(2\xi+1)^{n-1}}} =$$

$$= \mu_n \frac{(1+\xi)^n}{(2 \cdot \xi + 1)^{\frac{n-1}{2}}}$$

Betr.: $f(\xi) := \mu_n \cdot \frac{(1+\xi)^n}{(2\cdot\xi+1)^{n-1}}$

Wir suchen nach dem Minimum dieser Fkt

$f'(\xi) = \ldots$

$f'(\xi) = 0$ mit $\xi > -1$ für $\xi = -\frac{1}{2}$ u. $\xi = -\frac{1}{n+1}$

Da $f(\xi) \xrightarrow[\xi \to -\frac{1}{2}]{} +\infty$ ist, kann $\xi = -\frac{1}{2}$ kein Min. sein.

$f''\left(-\frac{1}{n+1}\right) > 0 \hookrightarrow \xi = -\frac{1}{n+1}$ - Min.

$\hookrightarrow$ (c) u. (d) jetzt auch trivial. ■

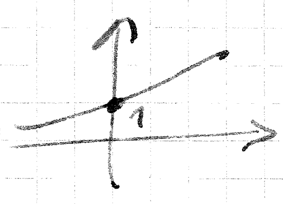
<u>Lemma 4:</u> $\frac{Vol(\tilde{E})}{Vol(\Omega_0)} < 1$, wobei Ω_0 die Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ($\hookrightarrow \lambda(\Omega) = \mu_n$)

$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - \underset{0}{x_0})^T \cdot E^{-1} \cdot (x-0) \leq 1\}$

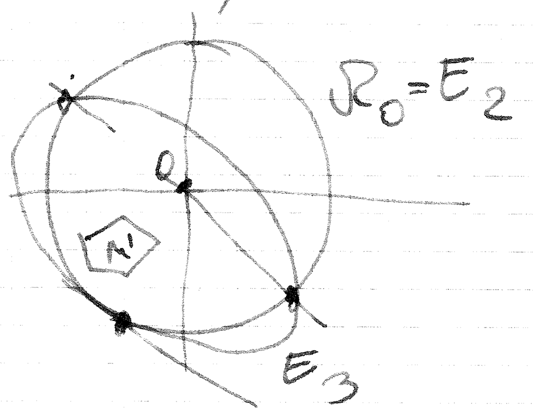
<u>Beweis:</u> Es gilt:

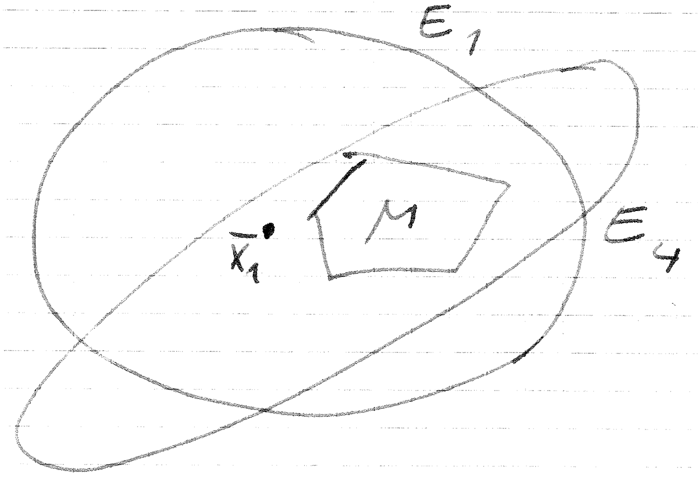
$$Vol(\tilde{E}) = \mu_n \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$\hookrightarrow \frac{Vol(\tilde{E})}{Vol(\Omega_0)} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{n-1}{2}} \underset{\text{L. 3.}}{\leq} \exp\Big(\underbrace{-\frac{1}{2(n+1)}}_{<0}\Big) <$$



Arbeitsplan:





(0) Sei E_1 um M beliebig. (!!!)

(1) Es ex. eine affine Tr. Φ

$\Omega_0 \xrightarrow{\Phi} E_1$ (d.h. $\bar{x}_1$, B_1 - fest, Ω_0 $\Rightarrow$ A, b zu bestimmen).

$\Rightarrow$ $E_1 \xrightarrow{\Phi^{-1}} \Omega_0$.

(2) Es ex E_3: $E_3 \supset M'$ und

$Vol(\Omega_0) > Vol(E_3)$.

~~Daraus gilt:~~ ~~Vol~~

(3) Sei $E_3 \xrightarrow{\Phi} E_4$.

Dann gilt: $\frac{Vol(E_3)}{Vol(\Omega_0)} \underset{L.4}{<} 1$ $\Rightarrow$ L. 1.

$\frac{Vol(E_4)}{Vol(E_1)} < 1$, d.h.

$Vol(V_1) > Vol(E_4)$

So erhalten wir eine Folge von E_4-Typ Ellipsoiden (und c_{E_4}-Mittelpktfolge) mit

$E_4^i \supset M$ und

$E_4^1, E_4^2, \dots, \tilde{E}_4$ mit

$$Vol(E_4^1) > \dots > Vol(E_4^n) > Vol(\tilde{E}_4) \text{ - endl.}$$

und $c_{\tilde{E}_4} \in M$!

Ende d. Arbeitsplan $\blacksquare$

<u>Lemma 5:</u> $Vol(E_k) > Vol.(E_{k+1})$

<u>Beweis:</u> trivial wegen L. 4.

<u>Lemma 6:</u> Sei $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \leq b\}$.

Ist $\lambda(M) \neq \emptyset$, so ermittelt der Alg in endlich viel Schritten ein El. $\bar{x} \in M$.

<u>Beweis:</u> Sei $Vol(M) > 0$.

Der Alg. konstr. eine Folge v. Ellipsoiden

$E_0, E_1, \dots, E_k \supset M$ mit

$$Vol(E_0) > Vol(E_1) > \dots > Vol(E_k) > \dots > Vol(M)$$

Dabei gilt: $$\frac{Vol(E_{k+1})}{Vol(E_k)} \underset{\substack{S.1. \\ + \\ L.1.}}{=} \left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < e^{-\frac{1}{2(n+1)}}$$

$$\Rightarrow \lambda(E_{k+1}) < \exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right) \cdot \lambda(E_k)$$

$$\Rightarrow \lambda(E_{k+1}) < \underbrace{\left(\exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)^{k+1}}_{:= a_{k+1}} \cdot \lambda(E_0)$$

Dabei ist die Folge

$$(a_{k+1})_{k=0,\dots} = \left(\left(\exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)^{k+1}\right)_{k=0,1,\dots} \quad \frac{1}{\sqrt[2(n+1)]{e^{k+1}}}$$ eine Nullfolge

d.h. $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, falls $(a_k)_k$ - nicht endl.

d.h. falls (a_k) - nicht endlich $\Rightarrow \lambda(M) = 0$ ↯

$\Rightarrow (a_k)$ - endlich ■

Lemma 7: Ist $0 < Vol(M) =: V$,
$Vol(E_0) =: V_0$,
so endet der Alg. nach

$2(n+1)(\ln(V_0) - \ln(V))$ Schritten!

Beweis: Es gilt:

$$Vol(M) < \left(\exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)^k \cdot Vol(E_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{V}{V_0} < \left(\exp\left(-\frac{1}{2(n+1)}\right)\right)^k = \frac{1}{e^{\frac{k}{2(n+1)}}} = e^{-\frac{k}{2(n+1)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{V_0}{V} > e^{\frac{k}{2(n+1)}}$$

$$\underset{\ln\text{-mon.}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{k}{2(n+1)} < \ln\left(\frac{V_0}{V}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad k < 2(n+1)(\ln V_0 - \ln V)$$

$$\underset{\substack{\text{s. nächste} \\ \text{2 Seiten}}}{\Longrightarrow} \quad k < 2n\left((3n+1)\langle A\rangle + (2n+1)\langle b\rangle - n^3\right)$$

$\square$

<u>Vorteile:</u> der Хачиян-Methode:
- polynomiale Zeit

<u>Nachteile:</u> Rechnen mit irrat. Zahlen!

<u>Noch zu klären:</u>

① Wie findet man ein Ellipsoid E_1, das S enthält?

② Wie kann man E_{k+1} aus E_k berechnen?

③ Wann kann man abbrechen $\to S = \emptyset$
$\to$ S unbeschr.

④ Wieviel Iterationen?

$\to$ folgen Eigenschaften (Sätze), die die Fragen beantworten.

Vorl. am 4. Juni '09

Satz: Für jede Ecke $V = (V_1, \dots, V_n)$ d. konv. Polyeders
$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$, $a_{ij} \in \mathbb{Q}$, $b_i \in \mathbb{Q}$
gilt: (a) $|V_i| \leq 2^{2\langle A\rangle + \langle b\rangle - 2n^2}$ $i = 1, \dots, n$

(b) Falls $a_{ij} \in \mathbb{Z} \Rightarrow |V_i| \leq 2^{\langle A\rangle + \langle b\rangle - n^2}$ $i = 1 \dots n$

%
- Sei $n \in \mathbb{Z} \xRightarrow{\text{Kodierung}}$ n benötigt $\lceil \log_2(|n|+1) \rceil$ Stellen (Bits) um n zu kodieren
$\Rightarrow$ Kodierungslänge von n ist dann
$\langle n \rangle := \lceil \log_2(|n|+1) \rceil + 1$

- Sei $A \in \mathcal{M}(\mathbb{Q}^n, \mathbb{Q}^m) \Rightarrow \langle A \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle a_{ij} \rangle$

- $r = \frac{p}{q}$ (teilfr. $q > 0$) $\Rightarrow \langle r \rangle = \langle p \rangle + \langle q \rangle$

- $\langle P \rangle = \langle c \rangle + \langle A \rangle + \langle b \rangle$; P – LOA: $\max_{Ax \leq b} c^T x$

Satz: Das LOA $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ hat eine Opt. Lsg gdw. beide lineare Programme
(P') $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0, \; x_i \leq 2^{2\langle A\rangle + \langle b\rangle - 2n^2}, i = 1 \dots n\}$
und (P'') $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0, \; x_i \leq 2^{2\langle A\rangle + \langle b\rangle - 2n^2} + 1, i = 1 \dots n\}$
eine Opt lsg haben und die Werte der Optimallösungen übereinstimmen. Die $ZF_{P'}$ und $ZF_{P''}$ stimmen genau dann nicht überein, wenn P unbeschr.

% Damit haben wir das LOP $\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ über ein Polyeder auf die Lsg zweier lin. Programme über Polytopen reduziert. %
$\Rightarrow$ müssen noch zeigen: ~~ht~~ Lösung für Polytopen

Satz Sei P ein Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ rat.
Dann sind alle Ecken v. P in der Kugel $S(0, R)$
mit $R := \sqrt{n}\; 2^{2\langle A \rangle + \langle b \rangle - 2n^2}$.

Ist P Polytop, so gilt $P \subseteq S(0, R)$
% Ein konv. Polyeder ist Polytop, falls es beschr. ist %
% Damit haben wir das 1. Ellipsoid, das P enthält %

Satz: Sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, $\mathring{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax < b\}$ und
$R := \sqrt{n}\; 2^{2\langle A \rangle + \langle b \rangle - 2n^2}$.

(a) Entweder gilt $\mathring{P} = \emptyset$ oder $vol(\mathring{P} \cap S(0, R)) \geq 2^{-(n+1)(\langle A \rangle + \langle b \rangle - n^2)}$

(b) Ist P volldim. ($\dim P = n$), so gilt dann
$vol(P \cap S(0, R)) = vol(\mathring{P} \cap S(0, R)) > 0$.

% Wenn das $Vol(S(0, R))$ < als $2^{-(n+1)(\langle A \rangle + \langle b \rangle - n^2)}$
so ist P leer %

Satz: Sei $A \in \mathcal{M}(\mathbb{Q}^m, \mathbb{Q}^n)$, $b \in \mathbb{Q}^m$.
$Ax \leq b$ hat eine Lsg gdw
$Ax < b + 2^{-\langle A \rangle + \langle b \rangle} \cdot \mathbb{1}$ eine Lsg hat.
Ferner kann man aus einer Lsg des strikten Ungl.systems in polynomialer Zeit eine Lsg von $Ax \leq b$ konstruieren.

Max Iterationszahl N

$$N = 2n\big((3n+1)\langle A \rangle + (2n+1)\langle b \rangle - n^3\big)$$