

Satz 2: Der Pkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $A_1 \bar{x} = a$
 $A_2 \bar{x} = b$
 $0 \leq \bar{x} \leq R$

ist opt für (P) gdw

$\exists \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix}$ mit

- (1) $A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - \bar{w} \leq c$
- (2) $\bar{w} \geq 0$
- (3a) $\bar{x}^T (A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - \bar{w} - c) = 0$
- (3b) $\bar{w}^T (R - \bar{x}) = 0$

Beweis (\rightarrow) Sei \bar{x} - opt für (P)

$\Leftrightarrow \exists \bar{y}$ - opt. für (D) \Leftrightarrow (1) und (2) \rightarrow g.

Im Problem gilt:

$$c^T \bar{x} = a^T \bar{u} + b^T \bar{v} - R^T \bar{w}$$

$$\Leftrightarrow c^T \bar{x} = (A_1 \bar{x})^T \bar{u} + (A_2 \bar{x})^T \bar{v} - R^T \bar{w}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}^T \cdot c = \bar{x}^T A_1^T \bar{u} + \bar{x}^T A_2^T \bar{v} - R^T \bar{w}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow R^T \bar{w} &= \bar{x}^T A_1^T \bar{u} + \bar{x}^T A_2^T \bar{v} - \bar{x}^T \cdot c \\ &= \bar{x}^T \underbrace{(A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - c)}_{\text{wg(1)} \leq \bar{w}} \end{aligned} \quad (*)$$

$$\rightarrow R^T \bar{w} \leq \bar{x}^T \bar{w} \Leftrightarrow (R^T - \bar{x}^T) \bar{w} \leq 0 \quad (**)$$

Ansonsten gilt nach Vor:

$$\bar{x} \leq R$$

$$\Leftrightarrow R^T \geq \bar{x}^T \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} (R^T - \bar{x}^T) \geq 0 \\ \bar{w} \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (R^T - \bar{x}^T) \cdot \bar{w} \geq 0 \quad (**)$$

$$\text{Aus } (**) \text{ u. } (***) \Leftrightarrow (R^T - \bar{x}^T) \bar{w} = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{w}^T (R - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \text{Beh (3b)} \checkmark$$

$$(3b) \Leftrightarrow R^T \bar{w} = \bar{x}^T \bar{w} \quad (***)$$

In (*) ersetzen wir $R^T \bar{w}$ durch (***)

$$\Leftrightarrow \bar{x}^T (A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - c) = \bar{x}^T \bar{w}$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}^T (A_1^T \bar{u} + A_2^T \bar{v} - c - \bar{w}) = 0 \quad \square$$

(\leftarrow) Behr.

$$(D) \max \{ a^T u + b^T v - R^T w \mid A_1^T u + A_2^T v - w \leq c, w \geq 0 \}$$

$$\Leftrightarrow \bar{y} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{pmatrix} \in M_D \text{ mit (1), (2), (3a), (3b).}$$

Behr. (P), behr. $\bar{x} \in M_P$ mit z.z.: \bar{x} opt.

z.z.: $c^T \bar{x} = a^T \bar{u} + b^T \bar{v} = R^T \bar{w}$

Folgt sofort aus (3a) u (3b.)

