

**Beispiel:**

Lösen Sie folgende Lineare Optimierungsaufgabe:

(P)

$$3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

**Lösung:**

Aus den Nebenbedingungen in (P) erhalten wir:

$$M_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 + u_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + u_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - u_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - u_4 = 1 \\ x_i \geq 0, u_j \geq 0. \end{cases}$$

Ein zulässiger Basispunkt ist nicht ohne weiteres angebar bzw. es ist nicht ohne weiteres klar, ob  $M = \emptyset$  ist. Deshalb führen wir die künstlichen Variablen  $y_1$  und  $y_2$  ein:

$$M_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 + u_1 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + u_2 = 2 \\ x_1 + x_2 - u_3 + \underbrace{y_1}_{=1} = 1 \\ 2x_1 - x_2 - u_4 + \underbrace{y_2}_{=1} = 1 \\ x_i \geq 0, u_j \geq 0, y_r \geq 0. \end{cases}$$

Damit haben wir die Hilfsaufgabe H zu lösen, um festzustellen, ob  $M = \emptyset$  oder  $M \neq \emptyset$ . Für den Fall, daß  $M \neq \emptyset$  ist, werden wir auch einen zulässigen Basispunkt finden:

(H):

$$\min\{y_1 + y_2 \mid M_2\}$$

=

$$-\max\{-y_1 - y_2 \mid M_2\}$$

d.h. wir betrachten als (H)  
(H)  $\max\{-y_1 - y_2 \mid M_2\}$

Wir haben:

Basisvariablen:  $u_1, u_2, y_1, y_2$

Nichtbasisvariablen:  $x_1, x_2, u_3, u_4$

Weitere Vorbereitungen: Die Zielfunktion muß als Funktion der Nichtbasisvariablen dargestellt werden!

Dazu:

$$y_1 = 1 - (x_1 + x_2 - u_3)$$

$$y_2 = 1 - (2x_1 - x_2 - u_4)$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} ZF &= -(y_1 + y_2) = \\ &= -(1 - (x_1 + x_2 - u_3) + 1 - (2x_1 - x_2 - u_4)) = \\ &= -(1 - x_1 - x_2 + u_3 + 1 - 2x_1 + x_2 + u_4) = \\ &= -2 - (-3x_1 + u_3 + u_4), \text{ d.h.} \end{aligned}$$

$$d_{00} = -2, d_{0,x_1} = -3, d_{0,x_2} = 0, d_{0,u_3} = 1, d_{0,u_4} = 1.$$

Jetzt können wir das erste Simplextableau für  $(H)$  aufstellen:

		$x_1$	$x_2$	$u_3$	$u_4$	Q
	-2	-3	0	1	1	
$u_1$	2	1	1	0	0	2
$u_2$	2	2	-1	0	-0	1
$y_1$	1	1	1	-1	0	1
$y_2$	1	<b>2</b>	-1	0	-1	1/2

		$y_2$	$x_2$	$u_3$	$u_4$	Q
	-1/2	3/2	-3/2	1	-1/2	
$u_1$	3/2	-1/2	3/2	0	1/2	1
$u_2$	1	-1	0	0	1	
$y_1$	1/2	-1/2	<b>3/2</b>	-1	1/2	1/3
$x_1$	1/2	1/2	-1/2	0	-1/2	

		$y_2$	$y_1$	$u_3$	$u_4$
	0	1	1	0	0
$u_1$	1	0	-1	1	0
$u_2$	1	-1	0	0	1
$x_2$	1/3	-1/3	2/3	-2/3	1/3
$x_1$	2/3	1/3	1/3	-1/3	-1/3

Dieses Tableau ist optimal und der Wert der Zielfunktion ist 0. Folglich ist  $M \neq \emptyset$  und als zulässiger Basispunkt für die Originalaufgabe ergibt sich:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \end{pmatrix} \in M_2, \text{ und damit } \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{u}_4 \end{pmatrix} \in M_1, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

Basisvariablen für die ursprüngliche Aufgabe:  $x_1, x_2, u_1, u_2,$

Nichtbasisvariablen für die ursprüngliche Aufgabe:  $u_3, u_4.$

Wir haben **ZF:  $3x_1 + 2x_2.$**

Damit das erste Tableau aufgestellt werden kann, müssen wir die Zielfunktion als Funktion der Nichtbasisvariablen darstellen: !

$$-\frac{2}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4 + x_2 = \frac{1}{3} \implies x_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4$$

$$-\frac{1}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4 + x_1 = \frac{2}{3} \implies x_1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4$$

Jetzt setzen wir  $x_1$  und  $x_2$  in die Zielfunktion ein:

$$ZF = 3x_1 + 2x_2 =$$

$$= 3\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4\right) + 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}u_3 - \frac{1}{3}u_4\right) =$$

$$= 2 + u_3 + u_4 + \frac{2}{3} + \frac{4}{3}u_3 - \frac{2}{3}u_4 =$$

$$= \frac{8}{3} + \frac{7}{3}u_3 + \frac{1}{3}u_4, \text{ d.h.}$$

$$d_{00} = \frac{8}{3}, d_{0,u_3} = -\frac{7}{3}, d_{0,u_4} = -\frac{1}{3}:$$

		$u_3$	$u_4$
	$8/3$	$-7/3$	$-1/3$
$x_1$	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$
$x_2$	$1/3$	$-2/3$	$1/3$
$u_1$	1	1	0
$u_2$	1	0	1

		$u_1$	$u_4$
	5	$7/3$	$-1/3$
$x_1$	1	$1/3$	$-1/3$
$x_2$	1	$2/3$	$1/3$
$u_3$	1	1	0
$u_2$	1	0	1

		$u_1$	$u_2$
	$16/3$	$7/3$	$1/3$
$x_1$	$4/3$	$1/3$	$1/3$
$x_2$	$2/3$	$2/3$	$-1/3$
$u_3$	1	1	0
$u_4$	1	0	1

Offensichtlich ist dieses Tableau optimal, und es gilt:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, ZF=16/3.$$