

Beispiel (Dualität):

Geben Sie die zu LOA (P_1) und (P_2) die jeweilige duale LOA (D_1) und (D_2) an:

$$(a) (P_1) \quad \max\{ 33x_1 + 13x_2 + 18x_3 \mid \begin{array}{l} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 32 \\ 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 51 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \}$$

$$(b) (P_2) \quad \max\{ x_1 \mid \begin{array}{l} 2x_3 + x_2 - x_1 \geq 1 \\ 2x_2 + x_3 + x_1 \leq 1 \\ x_1 + x_3 \leq x_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \}.$$

Lösung:

Wichtig: Bei max-LOA müssten alle Ungleichungen \leq Ungleichungen sein.

Bei min-LOA müssten alle Ungleichungen \geq Ungleichungen sein.

(vgl. Definition 1.17)

zu (a)

Zuerst multiplizieren wir die 4. Ungleichung mit (-1) , damit sie auch eine \leq Ungleichung wird. Wir erhalten dann:

$$\begin{array}{l} 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 32 \\ 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 \leq 51 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 21 \\ -x_1 - x_2 - x_3 \leq -3 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Folglich ist $c = (33, 13, 18)^T$ und $b = (32, 51, 21, -3)^T$. Damit lässt sich sofort lt. Definition 1.17 die duale LOA (D_1) angeben:

$$(D_1) \quad \min\{ 32y_1 + 51y_2 + 21y_3 - 3y_4 \mid \begin{array}{l} 8y_1 + 12y_2 + 5y_3 - y_4 \geq 33 \\ 3y_1 + 5y_2 + 2y_3 - y_4 \geq 13 \\ 4y_1 + 7y_2 + 3y_3 - y_4 \geq 18 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{array} \}.$$

zu (b)

Analog zu (a), zuerst multiplizieren wir die 1. Ungleichung mit (-1) , damit sie auch eine \leq Ungleichung wird. Die 3. Ungleichung wird auch entsprechend äquivalent umgeschrieben. Wir erhalten dann:

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Folglich ist $c = (1, 0, 0)^T$ und $b = (-1, 1, 0)^T$. Damit lässt sich sofort lt. Definition 1.17 die duale LOA (D_1) angeben:

$$(D_2) \quad \min\{ -y_1 + y_2 \mid \begin{array}{l} y_1 + y_2 + y_3 \geq 1 \\ -y_1 + 2y_2 - y_3 \geq 0 \\ -2y_1 + y_2 + y_3 \geq 0 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{array} \}.$$