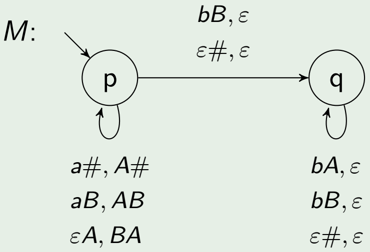
Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium VIII 1/2

Michael R. Jung

11. - 16. 12. 2015

Aufgabe 1

Wandeln sie den folgenden PDA M mit dem Verfahren aus der VL in eine Grammatik G um.



Geben Sie eine Rechung von M und eine Linksableitung in G für *aabbbb* an.

$$V := \{S, X_{p\#p}, X_{p\#q}, X_{pAp}, X_{pAq}, X_{pBp}, X_{pBq}, X_{q\#p}, X_{q\#q}, X_{qAp}, X_{qAq}, X_{qBp}, X_{qBq}\}$$

$$\Sigma := \{a, b\}$$

$$P := \{S \to X_{p\#p} | X_{p\#q}, \qquad \text{Start} \ (1,2)$$

$$X_{p\#p} \to a \underbrace{X_{pAp} X_{p\#p}}_{(p,p)} | a \underbrace{X_{pAq} X_{q\#p}}_{(q,p)}, \qquad pa\# \to pA\# \ (3,4)$$

$$X_{p\#q} \to a \underbrace{X_{pAp} X_{p\#q}}_{(p,q)} | a \underbrace{X_{pAq} X_{q\#q}}_{(q,q)}, \qquad pa\# \to pA\# \ (5,6)$$

$$X_{pBp} \to aX_{pAp}X_{pBp} | aX_{pAq}X_{qBp}, \qquad paB \to pAB \ (7,8)$$

$$X_{pBq} \to aX_{pAp}X_{pBq} | aX_{pAq}X_{qBq}, \qquad paB \to pAB \ (9,10)$$

$$X_{pAp} \to X_{pBp}X_{pAp}|X_{pBq}X_{qAp}, \qquad p\varepsilon A{\to}pBA \ (11, 12)$$

$$X_{pAq} \to X_{pBp}X_{pAq}|X_{pBq}X_{qAq}, \qquad p\varepsilon A{\to}pBA \ (13, 14)$$

$$X_{pBq} \to b \qquad pbB{\to}q \ (15)$$

$$X_{p\#q} \to \varepsilon \qquad p\varepsilon\#{\to}q \ (16)$$

$$X_{qBq} \to b \qquad qbB{\to}q \ (17)$$

$$X_{qAq} \to b \qquad qbA{\to}q \ (18)$$

$$X_{q\#q} \to \varepsilon \qquad q\varepsilon\#{\to}q \ (19)$$

$$\}$$

Somit ist $G = (V, \Sigma, P, S)$.

Rechnung von M:

$(p, aabbbb, \#) \vdash (p, abbbb, A\#) \vdash (p, abbbb, BA\#) \vdash (p, bbbb, ABA\#) \vdash$
$(p, bbbb, BABA\#) \vdash (q, bbb, ABA\#) \vdash (q, bb, BA\#) \vdash (q, b, A\#) \vdash$
$(q, \varepsilon, \#) \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon)$

Ableitung in G:

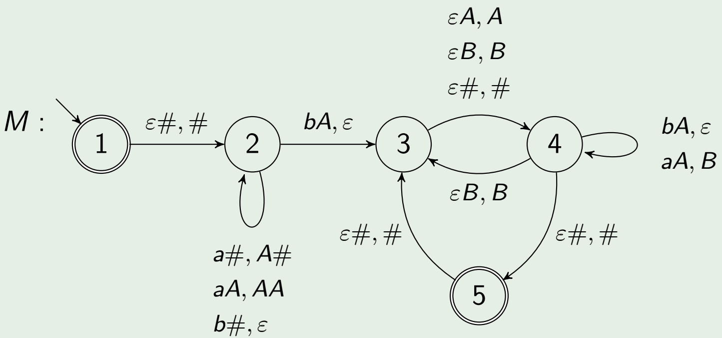
$S \Rightarrow^{(2)} X_{p\#q} \Rightarrow^{(4)} aX_{pAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(14)} aX_{pBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(10)}$
$aaX_{pAq}X_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(14)} aaX_{pBq}X_{qAq}X_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(15)}$
$aabX_{qAq}X_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(18)} aabbX_{qBq}X_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(17)} aabbbX_{qAq}X_{q\#q} \Rightarrow^{(18)}$
$aabbbbX_{q\#q} \Rightarrow^{(19)} aabbbb$

Welche Schritte sind zu tun, wenn ich einen gegebenen DPDA M zu einem DPDA für das Komplement von $L(M)$ umbauen will?

1. Zunächst benötigen wir einen Automaten, der alle Eingaben zu Ende liest (Vorlesungsfolie) und
2. nach Lesen eines Wortes nicht durch ε-Übergänge noch Endzustände und Nicht-Endzustände besucht.
3. Dann können wir einen DPDA für das Komplement angeben. Vorlesungsfolie

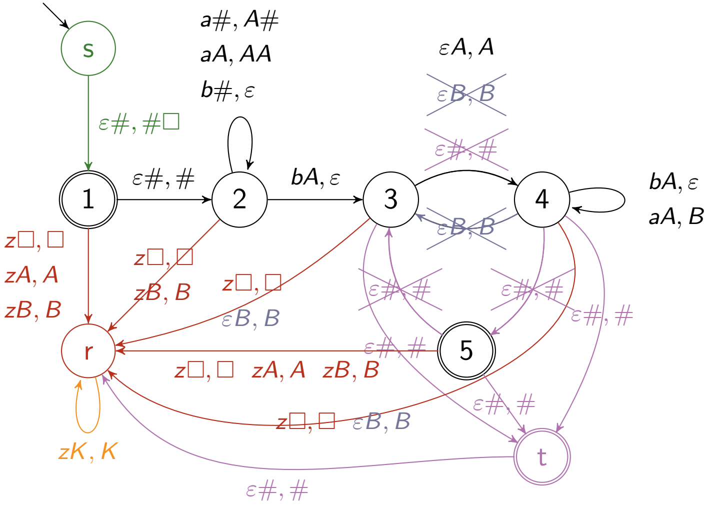
Aufgabe 2

Konstruieren Sie aus dem folgenden DPDA M einen Automaten M' mit $L(M') = L$, der alle Eingaben zu Ende liest.



Seien hier $z \in \Sigma$ und $K \in \Gamma'$ beliebig.

M' :



$M' = (\{1,2,3,4,5,r,s,t\}, \{a,b\}, \{\#, A, B, \Box\}, \delta', s, \#, \{1,5,t\})$

$K \in \{\Box, A, B\}$

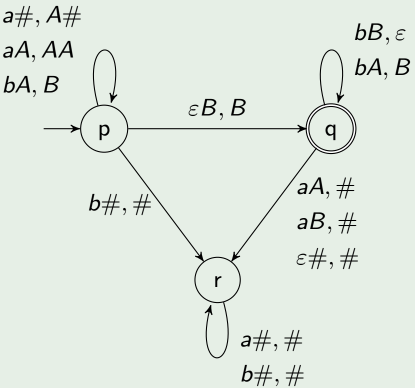
δ'	$s\#$	sK	$1\#$	$1K$	$2\#$	$2A$	$2B$	$2\Box$	$3\#$	$3A$	$3B$	$3\Box$
ε	$s\#\Box$		$2\#$						$t\#$	$4A$	rB	
a				rK	$2A\#$	$2AA$	rB	$r\Box$				$r\Box$
b				rK	2	3	rB	$r\Box$				$r\Box$

	$t\#$	tK	$r\#$	rK	$4\#$	$4A$	$4B$	$4\Box$	$5\#$	$5A$	$5B$	$5\Box$
ε	$r\#$				$t\#$		rB		$t\#$			
a			$r\#$	rK		$4B$		$r\Box$		rA	rB	$r\Box$
b			$r\#$	rK		4		$r\Box$		rA	rB	$r\Box$

Aufgabe 3

Wandeln Sie den gegebenen DPDA M, der alle Eingaben zu Ende liest in eine DPDA M' für $\overline{L(M)}$ um.

M :



$$M' = (\{p, q, r\} \times \{1, 2, 3\}, \{a, b\}, \{\#, A, B\}, \delta', (p, 1), \#, \{(q, 3), (p, 3), (r, 3)\})$$

δ'	$(p,1)\#$	$(p,1)A$	$(p,1)B$	$(p,2/3)\#$	$(p,2/3)A$	$(p,2)B$	$(p,3)B$
ε	$(p,3)\#$	$(p,3)A$	$(q,2)B$			$(q,2)B$	
a				$(p,1)A\#$	$(p,1)AA$		
b				$(r,1)\#$	$(p,1)B$		

	$(q,1)\#$	$(q,1)A$	$(q,1)B$	$(q,2)\#$	$(q,3)\#$	$(q,2/3)A$	$(q,2/3)B$
ε	$(r,1)\#$	$(q,3)A$	$(q,3)B$	$(r,2)\#$			
a						$(r,1)\#$	$(r,1)\#$
b						$(q,2)B$	$(q,2)$

	$(r,1)\#$	$(r,1)A$	$(r,1)B$	$(r,2/3)\#$	$(r,2/3)A$	$(r,2/3)B$
ε	$(r,3)\#$					
a				$(r,1)\#$		
b				$(r,1)\#$		

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie eine Grammatik G für $L = \{a^{n^2} | n \geq 1\}$ an.

Lösung:

$G = (\{S, H, A, V, E\}, \Sigma, P, S)$ mit

$$
P = \{ \quad \begin{array}{rll rll}
S & \to VH|a & (1,2) & AL & \to LAaa & (7) \\
H & \to AH|E & (3,4) & VL & \to Vaa & (8) \\
VE & \to aaaa & (5) & & & \\
AE & \to LEaaa & (6) & & & \\
aA & \to Aa & (9) & & & \\
aE & \to Ea & (10) & & &
\end{array}
\}
$$

Aufgabe 5

Geben Sie einen LBA M an, der $\{a^{2^n} | n \geq 0\}$ akzeptiert.

Lösung:

$M = (\{0,1,2,3,z,e\}, \{a,\hat{a}\}, \{a,\hat{a},A,\cancel{a},\cancel{\hat{a}}\}, \delta, 0, \{e\})$ mit

$$
\delta: \quad
\begin{array}{lll}
0\hat{a} \to e\hat{a}N & 2\cancel{a} \to 2\cancel{a}R & 3a \to 2\cancel{a}R \\
0a \to 1AR & 2\cancel{\hat{a}} \to z\cancel{\hat{a}}L & 3\hat{a} \to z\cancel{\hat{a}}L \\
1a \to 2\cancel{a}R & 2a \to 3aR & z\cancel{a} \to z\cancel{a}L \\
1\cancel{a} \to 1\cancel{a}R & 2\hat{a} \to 2\hat{a}N & za \to zaL \\
1\hat{a} \to z\cancel{\hat{a}}L & 3\cancel{a} \to 3\cancel{a}R & zA \to 1AR \\
1\cancel{\hat{a}} \to e\cancel{\hat{a}}N & 3\cancel{\hat{a}} \to 3\cancel{\hat{a}}N &
\end{array}
$$

Aufgabe 6

Geben Sie einen LBA M an, der $L(G)$ mit
$G = (\{S\}, \{a, b\}, \{S \to \underbrace{aSb}_{(1)} \mid \underbrace{ab}_{(2)}\}, S)$ akzeptiert.

Siehe Folien vom 14. Dezember, Folie 262.

Lösung:

$M = (Z, \hat{\Sigma} := \{a, \hat{a}, b, \hat{b}\}, \Gamma := \{A, \#, \hat{\#}, S, S'\}, \delta, q_0', \{e\})$ mit

Sei $x \in \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, S\}$ und $y \in (\hat{\Sigma} \cup \Gamma) \setminus \{\#, \hat{\#}\}$.

$Z = \{q_0, q_0', q_1, q_1', q_1'', q_2, q_2', q_<, q_>, q_?, e\} \cup \{q_{<-x}, q_x | x \in \{a, b, \hat{a}, \hat{b}, S\}\}$ und

δ :	$q_0'\hat{a} \to q_0'\hat{a}N$	$q_1 a \to q_1' SR$	$q_> \hat{b} \to q_{<-\hat{b}}\#$	$q_2 b \to q_2 bR$
	$q_0' b \to q_0' bN$	$q_1' S \to q_1'' \# R$	$q_> S \to q_{<-S}$	$q_2 S \to q_2 SR$
	$q_0' a \to q_0 AN$	$q_1'' b \to q_> \# R$	$q_> \hat{\#} \to q_< \hat{\#}$	$q_2 a \to q_2' SR$
	$q_0 A \to q_1 AN$	$q_1'' \hat{b} \to q_< \hat{\#} L$	$q_{<-x}\# \to q_{<-x}\# L$	$q_2 A \to q_2' S' R$
	$q_0 A \to q_2 AN$	$q_< \# \to q_< \# L$	$q_{<-x} y \to q_x y R$	$q_2' b \to q_> \# R$
	$q_1 A \to q_1 AR$	$q_< b \to q_< bL$	$q_x \# \to q_> xR$	$q_1 S \to q_1 SR$
	$q_1 a \to q_1 aR$	$q_< a \to q_< aL$	$q_1 A \to q_1 S' R$	
	$q_1 b \to q_1 bR$	$q_< A \to q_0 AN$	$q_< S' \to q_? S' R$	
	$q_1 \hat{a} \to q_1 \hat{a} N$	$q_> \# \to q_> \# R$	$q_? \# \to q_? \# R$	
	$q_1 \hat{b} \to q_1 \hat{b} N$	$q_> a \to q_{<-a}\#$	$q_? \hat{\#} \to e \hat{\#} N$	
	$q_1 \# \to q_1 \# N$	$q_> b \to q_{<-b}\#$	$q_2 A \to q_2 AR$	
	$q_1 \hat{\#} \to q_1 \hat{\#} N$	$q_> \hat{a} \to q_{<-\hat{a}}\#$	$q_2 a \to q_2 aR$	

233

DPDAs, die ihre Eingabe zu Ende lesen

Beweis (Schluss)

Zusammenfassend transformieren wir $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \#, E)$ in den DPDA

$$M' = (Z \cup \{r, s, t\}, \Sigma, \Gamma', \delta', s, \#, E \cup \{t\}) \text{ mit } \Gamma' = \Gamma \cup \{\square\},$$

wobei δ' folgende Anweisungen enthält:

(a) $s\varepsilon\# \to q_0\#\square$,

(b) $qaA \to rA$, für alle $(q, a, A) \in Z \times \Sigma \times \Gamma'$ mit $A = \square$ oder $\delta(q, a, A) = \delta(q, \varepsilon, A) = \varnothing$,

(c) $raA \to rA$, für alle $a \in \Sigma$ und $A \in \Gamma'$,

(d) $q\varepsilon A \to rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausgeführt werden, ohne dass dabei ein Endzustand besucht wird.

(e) $q\varepsilon A \to tA$, $t\varepsilon A \to rA$, für alle $q \in Z$ und $A \in \Gamma$, so dass ausgehend von der Konfiguration (q, ε, A) unendlich viele ε-Übergänge ausgeführt und dabei auch Endzustände besucht werden,

(f) alle Anweisungen aus δ, soweit sie nicht durch Anweisungen vom Typ (c) oder (e) überschrieben wurden. □

237

Komplementabschluss von DCFL

Beweis (Schluss)

- Konkret sei $\overline{M} = (Z \times \{1,2,3\}, \Sigma, \Gamma, \delta', s, \#, Z \times \{3\})$ mit

$$s = \begin{cases} (q_0, 1), & q_0 \notin E, \\ (q_0, 2), & \text{sonst}, \end{cases}$$

wobei δ' für jede Anweisung $q\varepsilon A \rightarrow_M p\gamma$ die Anweisungen

$$\begin{aligned} &(q,1)\varepsilon A \rightarrow (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E, \\ &(q,1)\varepsilon A \rightarrow (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E \text{ und} \\ &(q,2)\varepsilon A \rightarrow (p,2)\gamma, && \end{aligned}$$

sowie für jede Anweisung $qaA \rightarrow_M p\gamma$ folgende Anweisungen enthält:

$$\begin{aligned} &(q,1)\varepsilon A \rightarrow (q,3)A, && \\ &(q,2)aA \rightarrow (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E, \\ &(q,2)aA \rightarrow (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E, \\ &(q,3)aA \rightarrow (p,1)\gamma, && \text{falls } p \notin E \text{ und} \\ &(q,3)aA \rightarrow (p,2)\gamma, && \text{falls } p \in E. \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\overline{M}$ in einem Endzustand keine ε-Übergänge macht. □

264

Beweis von CSL $\subseteq \{L(M) \mid M$ ist ein LBA$\}$

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextsensitive Grammatik. Dann wird $L(G)$ von folgendem LBA M akzeptiert (o.B.d.A. sei $\varepsilon \notin L(G)$):

Arbeitsweise von M bei Eingabe $x = x_1 \dots x_{n-1}\hat{x}_n$ mit $n > 0$:

1. Markiere das erste Eingabezeichen x_1
2. Wähle (nichtdeterministisch) eine Regel $\alpha \to \beta$ aus P
3. Wähle ein beliebiges Vorkommen von β auf dem Band (falls β nicht vorkommt, halte ohne zu akzeptieren)
4. Ersetze die ersten $|\alpha|$ Zeichen von β durch α
5. Falls das erste (oder letzte) Zeichen von β markiert war, markiere auch das erste (letzte) Zeichen von α
6. Verschiebe die Zeichen rechts von β um $|\beta| - |\alpha|$ Positionen nach links und überschreibe die frei werdenden Bandfelder mit Blanks
7. Enthält das Band außer Blanks nur das (markierte) Startsymbol, so halte in einem Endzustand
8. Gehe zurück zu Schritt 2