

Einführung in die Theoretische Informatik

Tutorium IX

Michael R. Jung

16. & 17. 12. 2014



1 Entscheidbarkeit, Semi-Entscheidbarkeit und Unentscheidbarkeit

2 Berechenbarkeit



(Semi-)Entscheidbarkeit

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$.

- L heißt *semientscheidbar*, falls eine DTM M existiert mit $L(M) = L$.
- Sei M eine NTM und $x \in \Sigma^*$. M *entscheidet* x , falls $x \in L(M)$ oder $M(x)$ hält.
- L heißt *entscheidbar*, falls eine DTM M existiert, die alle Eingaben entscheidet mit $L(M) = L$.
- L heißt *unentscheidbar*, falls L nicht entscheidbar ist. Das Halteproblem ist also unentscheidbar und semientscheidbar.
- $\text{RE} = \{L \mid L \text{ semientscheidbar}\}$, $\text{REC} = \{L \mid L \text{ entscheidbar}\}$



Aufgabe 1

Nennen Sie eine REC-vollständige Sprache.

Lösung: $\{a\}$.



Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass alle Sprachen $L \neq \emptyset$ REC-schwer sind.



Sei $\Sigma^* \supseteq L \neq \emptyset$ und $\square \notin \Sigma$ sowie $\Sigma^* \ni x \in L$.

Zu zeigen: L ist REC-schwer.

Beweis.

Sei $\Pi^* \supseteq A \in \text{REC}$ und M eine DTM die χ_A berechnet.

Konstruiere nun eine DTM M' , die eine Reduktionsfunktion f folgendermaßen berechnet:

- Bei Eingabe eines $y \notin \Pi^*$ setze $f(y) := \square$.
- Bei Eingabe eines $y \in \Pi^*$ simuliere $M(y)$. Nun ist

$$f(y) = \begin{cases} x, & \chi_A(y) = 1 \\ \square, & \chi_A(y) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist f berechenbar und eine Reduktion von A auf L .



Berechnung von Funktionen

273

Definition

- ▶ Eine k -DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ **berechnet** eine Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$, falls M bei jeder Eingabe $x \in \Sigma^*$ in einer Konfiguration

$$K = (q, u_1, a_1, v_1, \dots, u_k, a_k, v_k) \text{ mit } u_k = f(x)$$

hält (d.h. $K_x \vdash^* K$ und K hat keine Folgekonfiguration).

- ▶ Hierfür sagen wir auch, M gibt bei Eingabe x das Wort $f(x)$ aus und schreiben $M(x) = f(x)$.
- ▶ f heißt **Turing-berechenbar** (oder einfach **berechenbar**), falls es eine k -DTM M mit $M(x) = f(x)$ für alle $x \in \Sigma^*$ gibt.
- ▶ Aus historischen Gründen werden berechenbare Funktionen auch **rekursiv** (engl. *recursive*) genannt.



Berechenbarkeit von partiellen Funktionen

274

Definition

- ▶ Eine **partielle Funktion** hat die Form $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^* \cup \{\uparrow\}$.
- ▶ Für $f(x) = \uparrow$ sagen wir auch $f(x)$ ist **undefiniert**.
- ▶ Der **Definitionsbereich** (engl. *domain*) von f ist

$$\text{dom}(f) = \{x \in \Sigma^* \mid f(x) \neq \uparrow\}.$$

- ▶ Das **Bild** (engl. *image*) von f ist

$$\text{img}(f) = \{f(x) \mid x \in \text{dom}(f)\}.$$

- ▶ f heißt **total**, falls $\text{dom}(f) = \Sigma^*$ ist.
- ▶ Eine k -DTM $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, E)$ **berechnet** f , falls $M(x)$ für alle $x \in \text{dom}(f)$ das Wort $f(x)$ ausgibt und für alle $x \notin \text{dom}(f)$ keine Ausgabe berechnet (d.h. $M(x) = \uparrow$).



Aufgabe 3

Sind folgende Funktionen $f, g, h : \{0, 1, \dots, 9\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ (partiell) berechenbar?

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \text{ ist Teil der Dezimaldarstellung von } \pi \\ \uparrow, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} 1, & x \text{ ist Teil der Dezimaldarstellung von } \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$h(x) := \begin{cases} 1, & 3^{|x|} \text{ ist Teil der Dezimaldarstellung von } \pi \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Es existiert ein Algorithmus, der die Dezimaldarstellung von π beliebig genau berechnen kann.



Lösung:

Die partielle Funktion f ist mit folgendem Algorithmus berechenbar:

```
Eingabe x;  
  k=10;  
  s="";  
  while (x nicht Teilwort von s)  
  begin  
    Berechne die ersten k Dezimalstellen  
      von Pi und speichere sie in s;  
    k=k*k;  
  end
```



Ob g berechenbar ist, ist unklar. Möglicherweise gilt für alle $x \in \{0, 1, \dots, 9\}^*$, dass x in der Dezimaldarstellung von π vorkommt. Dann ist $g \equiv 1$ und somit offensichtlich berechenbar. Falls nicht, bleibt die Frage offen.

h ist berechenbar, denn entweder kommen beliebig lange Folgen von 3^n vor, dann ist $h \equiv 1$. Ansonsten gibt es ein n , sodass 3^k für alle $k > n$ kein Teilwort der Dezimaldarstellung von π ist. Hier muss also nur die Länge von x geprüft werden, was natürlich auch berechenbar ist.

Wir wissen nur nicht welche Funktion die richtige ist, aber diese ist berechenbar.

