Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium IV

Michael R. Jung

10. - 12. 11. 2014

Aufgabe 1

Zeigen Sie das die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ eine Ordnung ist. (Schreibweise $x|y \Leftrightarrow \exists z \in \mathbb{N} : xz = y$))

Proof.

Reflexivität: $x|x$ klar, denn $1x = x$.

Antisymmetrie: Seien $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x|y$ und $y|x$.
Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $xn = y$ und $ym = x$. Dann gilt:
$xnm = x$, folglich $n = m = 1$ und somit $x = y$.

Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $x|y$ und $y|z$.
Dann existieren $m, n \in \mathbb{N}$ mit $xn = y$ und $ym = z$. Dann gilt:
$xnm = z$, folglich $x|z$. $\square$

Aufgabe 2

Geben sie die minimalen, kleinsten, maximalen und größten Elemente von $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ bezüglich $|$ an.

	minimale	Minimum	maximale	Maximum
$\mathbb{N} \setminus \{0\}$	1	1	$\varnothing$	$\varnothing$
$\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	$\mathbb{P}$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

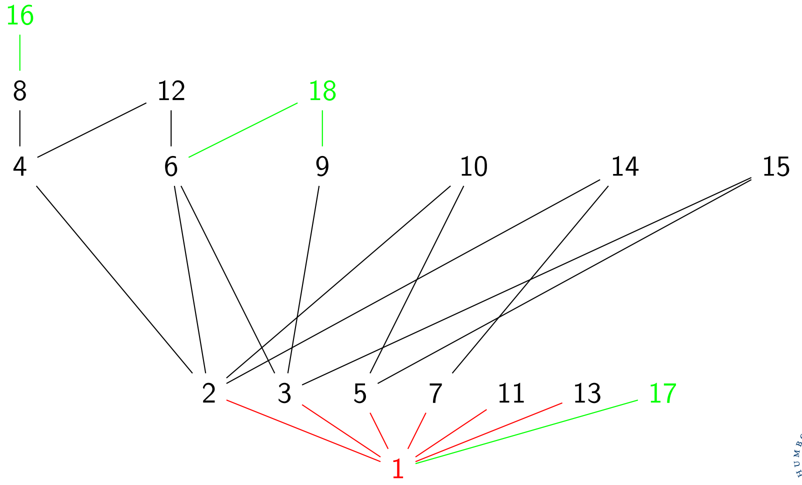
$\mathbb{P} := \{x \in \mathbb{N} | x \text{ ist eine Primzahl}\}$

Es gibt keine maximalen Elemente, da für alle $x \in \mathbb{N}$ gilt: $x|2x$.

Aufgabe 3

Stellen Sie $|$ auf $M := \{i \in \mathbb{N} | 2 \leq i \leq 15\}$ mit einem Hasse-Diagramm dar. Geben Sie alle unteren und oberen Schranken sowie Infimum und Supremum in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ für $|$ auf M an.

Hasse-Diagramm:



Lösung:

untere Schranken	$\{1\}$
Infimum	1
obere Schranken	$\{360360 \cdot k \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$
Supremum	360360

$$\mathrm{kgV}(M) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 360360$$

Aufgabe 4

1. Geben Sie einen Ordnungshomomorphismus von $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, |)$ auf $(\mathbb{N}, \leq)$ an.
2. Kann es zwischen diesen beiden Halbordnungen einen Isomorphismus geben? NEIN
3. Geben Sie eine Menge $M \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und einen Ordnungsisomorphismus zwischen $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(M, |)$ an.

Lösungen:

1. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}\setminus\{0\}}$.
2. Nein, denn unter jeder bijektiven Abbildung f würden zwar $f(2)$ und $f(3)$ bzgl. $\leq$ in einer Richtung in Beziehung stehen, 2 und 3 tun dies bzgl. $|$ allerdings nicht.
3. $M := \{2^i | i \in \mathbb{N}\}$ und $h : \mathbb{N} \to M$ mit $n \mapsto 2^n$.

Aufgabe 5

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils: Folgende Relationen sind Äquivalenzrelationen.

1. Grundmenge $\mathbb{R}$, $a \sim_1 b :\Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$ NEIN
2. Grundmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \sim_2 b :\Leftrightarrow a \cdot b > 0$ JA
3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Grundmenge $\mathbb{R}$, $a \sim_3 b :\Leftrightarrow f(a) = f(b)$. JA
4. Sei $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ Grundmenge, $(a, b) \sim_4 (c, d) :\Leftrightarrow ad = bc$ JA

1. nicht transitiv, da $1 \sim_1 0$ und $0 \sim_1 -1$ aber nicht $1 \sim_1 -1$.
2.
   - Reflexivität: Klar, da für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $x^2 > 0$.
   - Symmetrie: Klar, da Multiplikation auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ kommutativ, also $xy > 0 \Leftrightarrow yx > 0$.
   - Transitivität: Seien $x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $x \sim_2 y, y \sim_2 z$. Dann $xy > 0, yz > 0 \Rightarrow xyyz > 0 \overset{y^2>0}{\Rightarrow} xz > \frac{0}{y^2} \Rightarrow xz > 0 \Rightarrow x \sim_2 z$.
3.
   - Reflexivität: Klar, da $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x)$.
   - Symmetrie: Klar, da $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(y) = f(x)$.
   - Transitivität: Klar, da $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z) \Rightarrow f(x) = f(z)$.

4
- Reflexivität: Klar, da $\forall (a, b) \in M : ab = ab$.
- Symmetrie: Klar, da $\forall (a, b), (c, d) \in M : ad = bc \Leftrightarrow cb = da$.
- Transitivität: Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in M$ mit $(a, b) \sim_4 (c, d) \wedge (c, d) \sim_4 (e, f)$. Dann $ad = bc \wedge cf = de \Rightarrow adcf = bcde \Rightarrow af = be \Rightarrow (a, b) \sim_4 (e, f)$

Bemerkung: $M/\sim_4 \cong \mathbb{Q}$, da $(a, b) \sim_4 (c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Repräsentantensystem für $\sim_4$:

$$\{(a, b) \in M | b > 0 \wedge \forall (c, d) \sim_4 (a, b) : |d| \geq b\}$$

(Nenner positiv und möglichst klein)

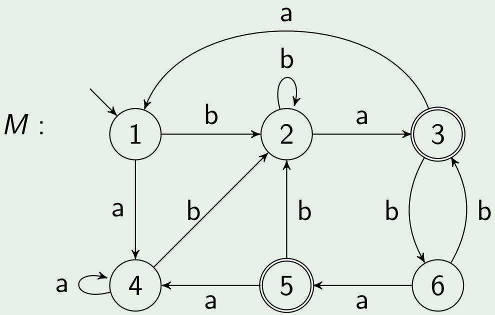
Aufgabe 6

Geben Sie zwei verschiedene Verfeinerungen von $\equiv_2$ auf $\mathbb{N}$ an.

Lösung: z.B. $\equiv_4, \equiv_6$.

Aufgabe 7

Minimieren Sie folgenden DFA M.

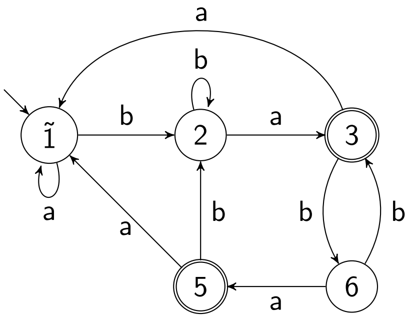


2	a				
3	ε	ε			
4		a	ε		
5	ε	ε	bb	ε	
6	a/b	b	ε	a/b	ε
	1	2	3	4	5

Bemerkung: An Position (i, j) steht ein Wort, so dass man aus i in einen Endzustand kommt und aus j nicht oder andersherum.

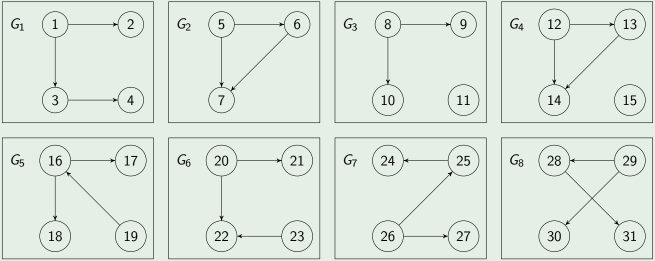
Es ergibt sich also folgender DFA M'.

M' :



Aufgabe 8

Welche der folgenden Digraphen sind zu G_1 isomorph? Begründen Sie Ihre negative Antwort oder geben Sie ggf. einen Isomorphismus an.



Lösung:

- $G_1 \cong G_1, f_1 = \mathrm{id}_{\{1,2,3,4\}}$.
- $G_1 \ncong G_2, |V(G_1)| > |V(G_2)|$.
- $G_1 \ncong G_3, |E(G_1)| > |E(G_2)|$.
- $G_1 \ncong G_4$, G_4 nicht zusammenhängend.
- $G_1 \ncong G_5, 16$ ist zu 3 Kanten inzident, aber kein Knoten in G_1 hat diese Eigenschaft.
- $G_1 \ncong G_6, \deg^-(22) = 2$, aber kein Knoten in G_1 hat diese Eigenschaft.
- $G_1 \cong G_7, f_7(1) = 26, f_7(2) = 27, f_7(3) = 25, f_7(4) = 24$.
- $G_1 \cong G_8, f_8(1) = 29, f_8(2) = 30, f_8(3) = 28, f_8(4) = 31$.