Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium XII

Michael R. Jung

20. & 21. 01. 2015

$g = \mathcal{O}(f)$

Seien $f, g : \mathbb{N} \to [0, \infty)$. Dann gilt $g = \mathcal{O}(f)$ $(g \in \mathcal{O}(f))$ $:\Leftrightarrow$

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\, \exists c > 0 \in \mathbb{R}\, \forall n \geq n_0 : g(n) \leq c \cdot f(n).$$

Aufgabe 1

Gelten folgende Aussagen? Beweisen Sie Ihre Antwort.

1. $2^{\log(4n^2)} = \mathcal{O}(n^3)$.
2. $\log(n^2) = \mathcal{O}(\log n)$.
3. $4^n = \mathcal{O}(2^n)$.
4. $2^{3\log(n)} = \mathcal{O}(3 \log 2^n)$.

1. $2^{\log(4n^2)} = \mathcal{O}(n^3)$? JA, denn:
   $\forall n \geq 0 : 2^{\log(4n^2)} = 4n^2 \leq \mathbf{4}n^3$.
2. $\log(n^2) = \mathcal{O}(\log n)$? JA, denn:
   $\forall n \geq 1 : \log(n^2) = 2\log n \leq \mathbf{2}\log n$.
3. $4^n = \mathcal{O}(2^n)$? NEIN, denn:
   $\forall n_0 \in \mathbb{N}\, \forall c > 0 \in \mathbb{R}\, \exists n \geq n_0 : 4^n = (2 \cdot 2)^n = 2^n \cdot 2^n > c \cdot 2^n$,
   wähle $n = 1 + \max\{\log c, 1, n_0\}$.
4. $2^{3\log n} = \mathcal{O}(3\log(2^n))$? NEIN, denn:
   $\forall n_0 \in \mathbb{N}\, \forall c > 0 \in \mathbb{R}\, \exists n \geq n_0 :$
   $2^{3\log n} = 2^{\log(n^3)} = n^3 > c \cdot 3\log(2^n) = c \cdot 3n$,
   wähle $n = 1 + \max\{3c, n_0\}$.

Aufgabe 2

Sind folgende 2-KNF-Formeln erfüllbar?

1. $\{\{\neg x_1, \neg x_2\}, \{x_4, \neg x_3\}, \{x_3, x_1\}, \{x_4, \neg x_1\}, \{\neg x_4, \neg x_3\}\}$
2. $\{\{x_1, x_5\}, \{\neg x_2, x_3\}, \{\neg x_1, x_3\}, \{x_4, \neg x_3\},$
   $\{x_1, x_2\}, \{x_1, \neg x_5\}, \{\neg x_1, \neg x_4\}\}$

1. JA, $x_1, = x_4 = 1, x_2 = x_3 = 0$. Dies ist die einzige erfüllende Belegung.
   - In einer erfüllenden Belegung müssen sowohl $(x_4 \vee \neg x_3)$ als auch $(\neg x_4 \vee \neg x_3)$ erfüllt sein. Unabhängig von der Belegung von x_4 muss also $x_3 = 0$ sein.
   - Wegen $(x_3 \vee x_1)$ ist also $x_1 = 1$.
   - Wegen $(\neg x_1 \vee \neg x_2)$ und $(x_4 \vee \neg x_1)$ muss also $x_2 = 0$ und $x_4 = 1$ gelten.
2. NEIN, denn:
   - In einer erfüllenden Belegung müssen sowohl $(x_1 \vee x_5)$ als auch $(x_1 \vee \neg x_5)$ erfüllt sein. Unabhängig von der Belegung von x_5 muss also $x_1 = 1$ sein.
   - Wegen $(\neg x_1 \vee x_3)$ und $(\neg x_1 \vee \neg x_4)$ müssen folglich $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$ sein.
   - Nun lässt sich aber die Klausel $(x_4 \vee \neg x_3)$ nicht mehr erfüllen.