Einführung in die Theoretische Informatik
Tutorium X

Michael R. Jung

06. & 07. 01. 2015

1 Post'sches Korrespondenzproblem

PCP

Sei Σ ein Alphabet mit $\# \notin \Sigma$. Seien Wortpaare $(x_1, y_1), \ldots, (x_k, y_k)$ über Σ gegeben.
Gesucht wird eine endliche Folge $\alpha = (i_1, \ldots, i_n), n \geq 1$ von Indizes $(i_j \in \{1, \ldots, k\})$ mit $x_{i_1} \ldots x_{i_n} = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$.

MPCP

Eine MPCP-Instanz ist eine PCP-Instanz, bei der man sich fragt, ob es eine Lösung gibt mit $i_1 = 1$, d.h. ob eine Lösung für die PCP-Instanz existiert, die mit dem ersten Paar beginnt.

Aufgabe 1

Geben Sie für die PCP-Instanz

$$\begin{pmatrix} 01 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 01 & 100 & 00 \end{pmatrix}$$

eine Lösung an.

Lösung:

$\alpha = (2, 4, 1)$, $w = x_2x_4x_1 = y_2y_4y_1 = 01001$. Alle Lösungen mit Indexfolgenlänge ≤ 11 findet ihr auf der Tutoriumswebseite.

Aufgabe 2

Warum kann es für die PCP-Instanz

$$\begin{pmatrix} 01 & 010 & 10 & 10 \\ 11 & 01 & 100 & 00 \end{pmatrix}$$

keine Lösung geben?

Lösung:

Weil keines der Paare das letzte/abschließende sein kann, da die Suffixe der Länge 1 bzw. 2 nicht übereinstimmen.

Aufgabe 3

Geben Sie zu der Grammatik $G = (\{S, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit

$$
\begin{aligned}
P: \quad S &\to aSBc|\varepsilon \\
cB &\to Bc \\
aB &\to ab \\
bB &\to bb
\end{aligned}
$$

die nach VL zugehörige MPCP-Instanzen für

1. $w_1 = \varepsilon$ und
2. $w_2 = aabbcc$

sowie jeweils eine Lösung an.

Lösung:

1. Instanz:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\langle & S & S & cB & aB & bB & S & B & a & b & c & | & |\rangle \\
\langle|S & aSBc & & Bc & ab & bb & S & B & a & b & c & | & \rangle
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Lösung: $(1, 12, 3, 13)$, $\langle|S|\rangle$

2. Instanz:

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\langle & S & S & cB & aB & bB & S & B & a & b & c & | & aabbcc|\rangle \\
\langle|S & aSBc & & Bc & ab & bb & S & B & a & b & c & | & \rangle
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Lösung: $(1, 12, 2, 12, 9, 2, 8, 11, 12, 9, 9, 3, 8, 4, 11, 12,$
$9, 5, 8, 11, 11, 12, 9, 9, 6, 11, 11, 12, 13)$,
$\langle|S|aSBc|aaSBcBc|aaBBcc|aabBcc|aabbcc|\rangle$